



FACULTAD DE INFORMÁTICA  
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

TESIS DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

UN ENFOQUE BORROSO PARA EL ANÁLISIS Y LA GESTIÓN DE  
RIESGOS EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN

AUTOR: ELOY VICENTE CESTERO.  
TUTORES: ALFONSO MATEOS CABALLERO.  
ANTONIO JIMÉNEZ MARTÍN.

JULIO 2013



$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n - k)!} a^{n-k} b^k$$

O Binomio de Newton é tão belo como a Vênus de Milo.  
 O que há é pouca gente para dar por isso.

\*\*\*\*\_\*\*\*\*\*\_\*\*\*\*\*

(O vento lá fora.)

( El binomio de Newton es tan bello como la Venus de Milo.  
 Lo que hay es poca gente que se dé cuenta de ello.

\*\*\*\*\_\*\*\*\*\*\_\*\*\*\*\*

(El viento, afuera.) )

Fernando Pessoa.

A mis padres y hermanos.  
 A Susana.



## Agrademientos

En primer lugar quiero agradecer a mis mentores, Alfonso Mateos y Antonio Jiménez, la oportunidad que me han brindado, las enseñanzas recibidas y las incansables revisiones realizadas. Espero continuar ganándome su confianza y respeto en futuros trabajos de doctorado.

A mi hermana Carmen y a mis sobrinos Elisa y Alfonsito por ayudarme en esta villa y corte de Madrid.

A Susana por su comprensión y por los fines de semana que le debo.

A mis padres por el apoyo que me han prestado durante tantos años.

La investigación realizada para el desarrollo de esta Tesis Fin de Máster se enmarca en los proyectos de investigación “Riesgo: Análisis, Gestión y Aplicaciones” , financiado por la Comunidad de Madrid (S2009/esp-1685) y el proyecto “Evaluación y Gestión del Riesgo en MCDM” del Ministerio de Ciencia e Innovación (MTM2011-28983-C03-03), en los que participan los directores de la tesis.



## Resumen

En los modelos promovidos por las normativas internacionales de análisis y gestión de riesgos en sistemas de información los activos están interrelacionados entre sí, de modo que un ataque sobre uno de ellos se puede transmitir a lo largo de toda la red, llegando a alcanzar a los activos más valiosos para la organización. Es necesario entonces asignar el valor de todos los activos, así como las relaciones de dependencia directas e indirectas entre éstos, o la probabilidad de materialización de una amenaza y la degradación que ésta puede provocar sobre los activos. Sin embargo, los expertos encargados de asignar tales valores a menudo aportan únicamente información imprecisa, de modo que las técnicas borrosas pueden ser muy útiles en este ámbito.

Para poder dar un tratamiento computacional a esta información imprecisa es necesario proveer a los expertos de un método con el que puedan expresar sus juicios probabilísticos o sus valoraciones sobre los activos de información en forma de números difusos y evitando sesgos informativos. Una vez obtenidos tales valores, hemos de construir algoritmos que nos permitan establecer indicadores de impacto y riesgo para las amenazas que se ciernen sobre los activos de información, y finalmente debemos proponer conjuntos óptimos de salvaguardas y controles para reducir el riesgo a un nivel asumible.

En este trabajo desarrollamos elementos que permiten realizar todo este proceso partiendo de los conceptos básicos de Lógica Borrosa y de las metodologías internacionales de análisis y gestión de riesgos en los sistemas de información.





## **Abstract**

In models promoted by international standards on Risk Analysis in Information Systems assets are interrelated so that an attack on one of them can be transmitted along the entire network reaching the most valuable assets for the organization. Then, it is necessary to value the assets and the direct and indirect dependency between them, as well as frequency of threats and the degradation they may cause on the assets. However, experts responsible for assigning such values often provide only imprecise information so that fuzzy logic can be very useful in such situation. It is necessary to provide experts different methods to manage the computational treatment of the imprecise information, allowing them to express their probabilistic judgments or valuation on the assets in a fuzzy way and avoiding bias. Once we have valued assets, we must construct algorithms to establish impact and risk indicators for the possible threats and, finally, we safeguard optimal sets have to be proposed as well as controls to reduce the risk to an acceptable level. In this Master's Final Project we have developed elements that allow to carry out the whole process, taking into account basic concepts of fuzzy logic and international methodologies on risk analysis and management information systems.



## Índice general

Agradecimientos	i
Resumen	iii
Abstract	v
Capítulo 1. INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 2. OBJETIVOS	5
Capítulo 3. ELEMENTOS DE LÓGICA BORROSA EN EL MODELADO DE LA INCERTIDUMBRE	7
3.1. Números Borrosos. Aritmética y Topología	10
3.2. Modelado Lingüístico Difuso	15
3.3. El Modelo Computacional y la Función de Similitud	17
3.4. Educción de Probabilidades Mediante Números borrosos	20
3.4.1. De la Teoría Clásica de la Probabilidad a la Teoría de la Probabilidad Lingüística	21
3.4.2. Asignación de Probabilidades Reales mediante Apuestas y Loterías	24
3.4.3. Asignación de Probabilidades Borrosas mediante Apuestas y Loterías	29
3.4.4. Calidad de la Información. Medidas de Borrosidad y de Coherencia de los Expertos	33
3.5. Conclusiones	38
Capítulo 4. UNA NUEVA FUNCIÓN DE SIMILITUD DE NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOIDALES GENERALIZADOS	39
4.1. Funciones de similitud de números borrosos trapezoidales	40

4.2.	Una nueva función de similitud de números borrosos trapezoidales	46
4.3.	Estudio comparativo	53
4.4.	Conclusiones	60
Capítulo 5. ANÁLISIS DE RIESGOS EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN. UN ENFOQUE BORROSO		61
5.1.	Análisis y gestión de riesgos basado en la metodología MAGERIT	61
5.2.	Borrosificación del análisis de riesgos basado en la metodología MAGERIT	66
5.2.1.	Valor Acumulado en los activos de soporte	71
5.2.2.	Amenazas. Indicadores de impacto y riesgo, y uso de la función de similitud	72
5.3.	Gestión de riesgos mediante Algoritmos Evolutivos y Programación Dinámica en ambiente borroso	73
5.3.1.	Selección de salvaguardas sobre un activo mediante algoritmos evolutivos multiobjetivo en ambiente borroso	75
5.3.2.	Protección de los activos terminales a cualquier amenaza. Minimización de la probabilidad de transmisión de fallos	81
Capítulo 6. CONCLUSIONES		85
Capítulo 7. LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN		87
Bibliografía		89

## INTRODUCCIÓN

En multitud de situaciones el enfoque subjetivo es el único enfoque posible para la asignación de probabilidades de ocurrencia de sucesos para los cuales no se tienen datos históricos previos, ni existe la posibilidad de poner en práctica mecanismos empíricos para la obtención de datos. Consideraciones de tipo ético, legal, técnico o económico impiden la elaboración de tales experimentos. De este modo, la Estadística Bayesiana se erige en el paradigma fundamental de asignación de probabilidades subjetivas, ya que permite la actualización de las probabilidades conforme los expertos van adquiriendo información sobre el suceso. Por esta razón, dicho paradigma es el más utilizado en los sistemas de ayuda a la decisión que necesitan valoraciones de expertos, como puede ser el análisis de riesgos en cualquier ámbito.

Sin embargo, en multitud de ocasiones el ambiente en el que se desarrolla un sistema de ayuda a la decisión es de incertidumbre, imprecisión y vaguedad, de modo que expertos y decisores son incapaces de dar valores concretos a las utilidades de las alternativas entre las cuales decidir, a los pesos de los distintos criterios de decisión, o a las probabilidades de ocurrencia de los distintos escenarios.

La Lógica Borrosa, creada por Lotfy A. Zadeh a mediados de la década de los años 60 del siglo pasado, es un paradigma de representación del conocimiento donde los objetos no tienen por qué “ser” o “no ser” elementos de un determinado conjunto, sino que puede haber matices continuos entre ambas condiciones. Dicho paradigma nos permite modelar términos lingüísticos vagos e imprecisos, del tipo “mucho”, “mediano” o “poco”, y operar con ellos en un proceso de inferencia.

Por ejemplo, cuando los expertos son incapaces de decidirse por un valor concreto al asignar probabilidades subjetivas a un suceso, puede ser útil, y de hecho es muy

común, establecer escalas de términos lingüísticos como “muy bajo”, “bajo”, “medio”, “alto”, “muy alto” para asignar probabilidades sin exigir un compromiso excesivo del experto en cuanto a la precisión de sus juicios. Estos términos lingüísticos se pueden asociar a números borrosos trapezoidales normalizados con soporte en  $[0,1]$  para poder operar con ellos dentro de una aritmética adecuada. También existen métodos eficientes para extraer el juicio probabilístico borroso de los expertos, evitando cometer sesgos derivados del uso de escalas rígidas que centran la atención de los expertos en unos cuantos números borrosos trapezoidales.

En las metodologías estatales de análisis y gestión de riesgos en los Sistemas de Información (SI), tales como la norteamericana NIST, la francesa MEHARI o la española MAGERIT, que toman como base las normas internacionales de la serie ISO/IEC 27000, se propone habitualmente la adopción de un modelo cuantitativo, en que probabilidades y valoraciones son números reales, o un modelo cualitativo, en que se asigna un número natural a una escala de términos lingüísticos para dar probabilidades o valoraciones. Los inconvenientes de ambos métodos son claros: El modelo cuantitativo asume que tenemos conocimientos precisos de la probabilidad de ocurrencia de todos los eventos y del valor de todos los activos, lo cual en la mayoría de los casos no es cierto, y el modelo cualitativo no justifica la asignación de un número natural a un término lingüístico, sino que más bien esta asignación obedece a cuestiones operativas, transformando información imprecisa suministrada por el experto en información nítida de manera arbitraria, únicamente manteniendo el orden natural de la escala lingüística.

A medio camino entre ambos enfoques, cualitativo y cuantitativo, se posiciona el enfoque borroso, que transforma la escala lingüística en números borrosos, de modo que se mantiene la imprecisión suministrada por el experto y el orden de la escala lingüística, permitiendo a su vez, el uso de aritméticas borrosas adecuadas para operar con tales números. Por tanto, este enfoque, recoge las ventajas de los modelos actuales promovidos por las metodologías estatales de análisis y gestión de riesgos en los SI, y evita los inconvenientes de cada uno de ellos.

---

Como decimos, la información lingüística suministrada por los expertos puede ser transformada en números borrosos trapezoidales con los que se puede operar por medio de una aritmética adecuada o, en el caso de sistemas de control borrosos, son las entradas de un sistema basado en reglas de tipo IF/THEN. Pues bien, tanto los resultados de las aritméticas borrosas, como los de las reglas de inferencia, no son, en general, números borrosos de las escalas previamente definidas, de modo que para informar convenientemente de tales resultados, hemos de transportarlos a dichas escalas, y esto se hace por medio de funciones de similitud de números trapezoidales, de modo que el término lingüístico que se elige para informar de un resultado borroso es el término de la escala representado por el número borroso trapezoidal más parecido al resultado.

Para establecer la similitud entre los números borrosos implicados se puede recurrir a diferentes parámetros que dan una idea de la distancia entre ambos, de la forma o del tamaño. Estos parámetros se agregan en expresiones que definen el grado de similitud entre dos números borrosos. Sin embargo, todas las medidas de similitud tienen inconvenientes, debido a que los parámetros utilizados para definirlos no siempre son los más adecuados según las circunstancias del problema y de los números que el modelo maneja.

En este trabajo desarrollamos un nuevo enfoque para el análisis de riesgos en los sistemas de información basado en la lógica borrosa, proponiendo un algoritmo interactivo de educación del juicio probabilístico borroso del experto, una aritmética de números borrosos trapezoidales adecuada que, junto con un algoritmo recursivo, simplifica y mejora el modelo propuesto por las metodologías estatales consultadas, una nueva función de similitud de números borrosos trapezoidales que mejora al resto de funciones de la literatura, y un modelo de optimización en la selección de salvaguardas y controles en la gestión del riesgo en los SI mediante metaheurísticas y Programación Dinámica.

En el Capítulo 2 de esta tesis fin de máster enumeramos los objetivos de la misma. En el Capítulo 3, exponemos los elementos de lógica borrosa que vamos a

necesitar a lo largo de toda la tesis y proponemos un método de educación de probabilidades borrosas. En el Capítulo 4 realizamos un estado del arte sobre funciones de similitud de números borrosos trapezoidales, evaluando cada función en cuanto a sus ventajas e inconvenientes. También proponemos una función que mejore a las funciones encontradas en la literatura, y realizamos una comparativa. En el Capítulo 5 aplicamos lo anterior para establecer un modelo de análisis y gestión de riesgos en los sistemas de información. Es decir, un sistema que ayude en la toma de decisiones a partir de la información lingüística aportada por los expertos. Finalmente, presentamos las conclusiones de este trabajo e indicamos líneas futuras de investigación en los capítulos 6 y 7 respectivamente.



## Capítulo 2

### OBJETIVOS

El objetivo fundamental de esta tesis consiste en proponer un modelo de análisis de riesgos en los sistemas de información bajo un enfoque borroso. Este objetivo general se puede subdividir en los siguientes:

1. Definir y describir aquellos elementos de lógica borrosa necesarios en el modelo, estableciendo un estado del arte sobre números borrosos trapezoidales, aritméticas borrosas y funciones de similitud de dichos números.
2. Proponer un método interactivo analista-experto mediante el cual podamos extraer el juicio probabilístico borroso del experto sobre un evento cualquiera, evitando sesgos. Para ello, hemos de describir los elementos básicos de la Teoría de la Probabilidad Lingüística, extendiendo a la Teoría Clásica de la Probabilidad.
3. Proponer una aritmética adecuada que mejore las aritméticas borrosas usuales, simplificando los algoritmos que vamos a utilizar en el análisis de riesgos en los SI.
4. Proponer una función de similitud que mejore las funciones señaladas en la literatura, aportando propiedades deseables y corrigiendo los inconvenientes encontrados en otras funciones de similitud. Probar la bondad de la función propuesta mediante un análisis comparativo con el resto de funciones de la literatura.
5. Aplicar los elementos anteriores en el ámbito del análisis de riesgos en los SI.
6. Describir técnicas de selección óptima de salvaguardas en la gestión del riesgo en los SI mediante metaheurísticas y Programación Matemática.



## Capítulo 3

# ELEMENTOS DE LÓGICA BORROSA EN EL MODELADO DE LA INCERTIDUMBRE

El paradigma de la Lógica Borrosa comienza a partir de la Teoría de Conjuntos borrosos, definiendo un conjunto  $A$  de una categoría  $\chi$  como un término lingüístico junto con una función  $\mu_A : \chi \rightarrow [0, 1]$  que indica el grado de pertenencia de cualquier elemento de  $\chi$  al conjunto  $A$ . Esto nos permite modelar términos vagos o imprecisos. Por ejemplo, podemos definir el conjunto borroso  $A =$  “Cercano al punto (2,2)” de  $\mathbb{R}^2$  (Figura 3.0.1) mediante la función de pertenencia

$$\mu_A(x, y) = e^{-(x-2)^2 - (y-2)^2}.$$

Esto quiere decir que el punto (2,2) tiene un grado de pertenencia  $\mu_A(2, 2) = 1$  a “Cercano a (2,2)”, mientras que el (5,7) tiene un grado de pertenencia  $\mu_A(5, 7) = e^{-34} = 1.7 \times 10^{-15} \approx 0$ . Sin embargo, la frontera entre “Cercano a (2,2)” y “No cercano a (2,2)” es borrosa.

La Teoría de Conjuntos Borrosos extiende a la Teoría Clásica de Conjuntos, que, en lo sucesivo llamaremos Teoría de Conjuntos Nítidos, ya que un conjunto clásico es un caso degenerado de conjunto borroso con función de pertenencia

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

La Teoría de Conjuntos Borrosos, en muchos casos, es más natural y eficiente que la Teoría de Conjuntos Nítidos. Por ejemplo, pensemos en el conjunto de personas de estatura alta. La Teoría de Conjuntos Nítidos identifica una cota por debajo de la cual las personas ya no son consideradas altas. Supongamos que se considera que una persona es alta a partir de una estatura de 180 cm. La Teoría de Conjuntos

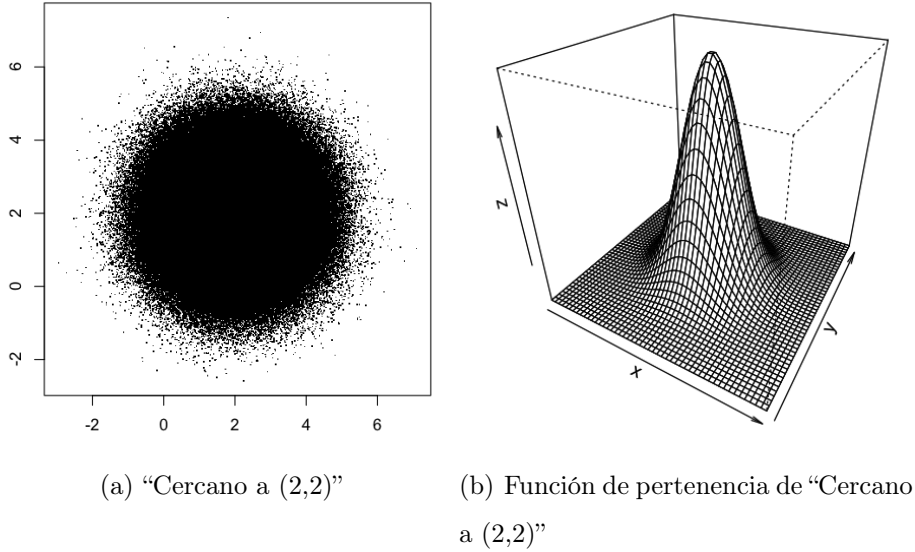


FIGURA 3.0.1. Conjunto borroso “Cercano a (2,2)”

Nítidos considera “no alta” a una persona que mide 179 cm, mientras que la Teoría de Conjuntos Borrosos, considera que esta persona tiene un grado de pertenencia cercano a 1 al conjunto de las personas altas, y por tanto *tiene más de “alta” que de “no alta”*. Más formalmente, si asignamos una función de pertenencia

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 170 \\ 1 - e^{-0.4(x-170)^2}, & \text{si } 175 \leq x \end{cases}.$$

para el conjunto “personas altas”, donde  $x$  mide la estatura en cm, entonces el grado de pertenencia de una persona con 179 cm de estatura es de 0.9983, mientras que para una persona de 180 cm su grado de pertenencia es de 0.9999. Sin embargo, con la Teoría de Conjuntos Nítidos, el grado de pertenencia de una persona con 179 cm es de 0 (no es alta) y el de una persona con 180 cm es de 1 (es alta). Entonces la Teoría de Conjuntos Borrosos representa mejor el razonamiento que la teoría clásica.

La Teoría de Conjuntos Borrosos fue introducida por primera vez en 1965 por Lotfy A. Zadeh [67], de la Universidad de California en Berkeley, aunque su aplicación natural, la Teoría de Controladores borrosos, no fue presentada hasta 1973 [69]. Esta teoría, denominada recientemente por el propio Zadeh como *Computación*

---

con *Palabras* [39], consiste en confeccionar una base de reglas en las que intervienen términos lingüísticos imprecisos para tomar decisiones automáticas que controlan un proceso determinado. Aplicaciones inmediatas de la teoría se han desarrollado en procesos de purificación del agua, sistemas de calefacción, aparcamiento automático y autoconducción inteligente de vehículos, análisis de riesgos, etcétera [39].

La Teoría de Conjuntos Borrosos junto con la Teoría de Controladores Borrosos forman la Lógica Borrosa. Esta disciplina tubo dificultades para prosperar en sus orígenes, ya que únicamente la comunidad científica y técnica japonesa supo verla y acogerla como una disciplina que revolucionaría la ingeniería. Actualmente, empresas como NASA, Boeing, Ford o Bell utilizan la lógica borrosa en sus procesos, mientras que Zadeh recibe numerosos galardones honoríficos en todo el mundo por su invento.

De la Teoría de Conjuntos borrosos se obtiene naturalmente una Teoría de Números borrosos sin más que considerar  $\chi = \mathbb{R}$ . Esta teoría permite sintetizar en un único modelo las ventajas de sistemas cualitativos y cuantitativos, de modo que por un lado permite tratar la información en términos lingüísticos cualitativos, y por otro lado permite el establecimiento de herramientas de cálculo (aritméticas) que permiten dar un tratamiento cuantitativo a la información. Este enfoque es especialmente útil en los sistemas expertos en los que la información aportada es vaga o imprecisa. En esta dirección pueden verse, a modo de ejemplo, las redes bayesianas borrosas utilizadas por Halliwell [22] en el ámbito de la estadística forense, o el modelo de análisis y gestión de riesgos en los sistemas de información utilizado por Vicente et al. [58], que exponemos en el Capítulo 7. En estos modelos la información lingüística imprecisa aportada por los expertos es tratada por medio de una aritmética borrosa para obtener indicadores útiles que informen a los decisores sobre los procesos tratados. El valor final de estos indicadores no tiene por qué coincidir con una de las etiquetas lingüísticas de las que partíamos, y es aquí donde necesitaremos el uso de funciones de similitud de números borrosos para la asignación de una etiqueta.

En este capítulo describiremos las herramientas necesarias para el establecimiento de estos sistemas expertos borrosos y veremos una técnica de extracción (educación) del juicio probabilístico mediante un diálogo interactivo analista-experto.

En la Sección 3.1 exponemos las herramientas sobre *números borrosos* que vamos a utilizar a lo largo de esta tesis, en la Sección 3.2 exponemos el concepto de *variable lingüística*, en la Sección 3.3 planteamos la necesidad de utilizar funciones de similitud de números difusos trapezoidales generalizados, y en la Sección 3.4 presentamos el concepto de *variable aleatoria lingüística* y el método de educación de probabilidades.

### 3.1. Números Borrosos. Aritmética y Topología

Como se ha indicado, un conjunto borroso  $A$  de una categoría  $\chi$  se define a partir de una función  $\mu_A : \chi \rightarrow [0, 1]$  que indica el grado de pertenencia de cada elemento de la categoría al conjunto  $A$ . En particular, si  $\chi = \mathbb{R}$  podemos hablar de *números borrosos*:

**Definición 3.1.** Un *número borroso normalizado*  $\tilde{A}$  se define por medio de una función de pertenencia  $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  verificando las siguientes propiedades [70, 71, 72]:

1.  $\max_{x \in \mathbb{R}} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\} = 1$ .
2.  $\forall x \leq y \leq z$  se tiene  $\mu_{\tilde{A}}(y) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(z))$ .
3. El soporte de  $\mu_{\tilde{A}}$  es acotado.
4.  $\forall \alpha > 0$  el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$  es cerrado.

Además, si  $\max_{x \in \mathbb{R}} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\} = w \in [0, 1)$  el número se denomina *generalizado* [6].

Existe una serie de elementos notables en los conjuntos y números borrosos que pasamos a definir.

**Definición 3.2.** Llamaremos *soporte* de  $A$  al conjunto de elementos cuyo grado de pertenencia a  $A$  es no nulo:  $\text{sop}(A) = \{x \in \chi : \mu_A(x) > 0\}$ .

**Definición 3.3.** Llamaremos *núcleo* de  $A$  al conjunto de elementos cuyo grado de pertenencia a  $A$  es 1:  $\text{Núcleo}(A) = \{x \in \chi : \mu_A(x) = 1\}$ .

### 3.1. NÚMEROS BORROSOS. ARITMÉTICA Y TOPOLOGÍA

**Definición 3.4.** Llamaremos *altura* de  $A$  a  $w_A = \max_{x \in \chi} \{\mu_A(x)\}$ .

**Definición 3.5.** Dado  $\alpha \in [0, 1]$ , se define el  $\alpha$ -*corte* de  $\tilde{A}$  como :

$$A_\alpha = \begin{cases} \{x \in \chi : \mu_A(x) \geq \alpha\}, & \text{si } \alpha \in (0, 1] \\ \overline{\{x \in \chi : \mu_A(x) > 0\}}, & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}.$$

En particular, los  $\alpha$ -*cortes* de cualquier número borroso son intervalos reales cerrados [2]. En la Figura 3.1.1 se señalan estos elementos sobre un número borroso. Esta figura corresponde a un número borroso con función de pertenencia

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0.1 \\ \frac{x-0.1}{0.1}, & \text{si } 0.1 \leq x < 0.2 \\ 1, & \text{si } 0.2 \leq x < 0.3 \\ \frac{0.4-x}{0.1}, & \text{si } 0.3 \leq x < 0.4 \\ 0, & \text{si } 0.4 \leq x \end{cases}$$

a la que llamamos función de pertenencia *trapezoidal*.

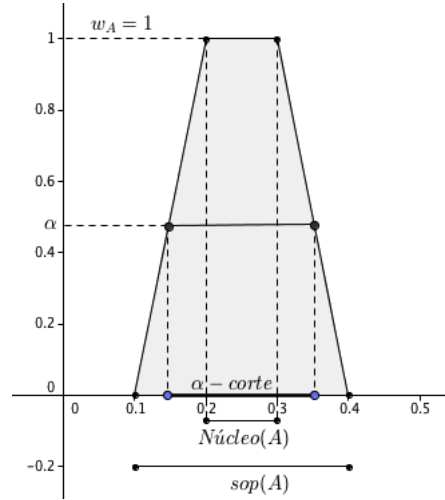


FIGURA 3.1.1. Elementos de un conjunto borroso.

Otros tipos de funciones de pertenencia sobre la recta real que se utilizan con frecuencia son

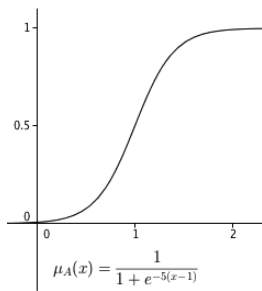
1. La función de pertenencia triangular:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{si } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{si } x \geq c \end{cases}.$$

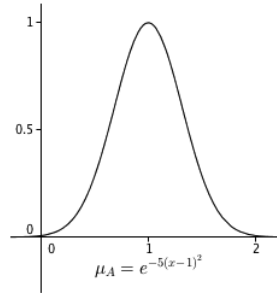
2. La función gaussiana:  $\mu_A(x) = e^{-k(x-m)^2}$ .

3. La función sigmoidea:  $\mu_A(x) = \frac{1}{1+e^{-k(x-b)}}$ .

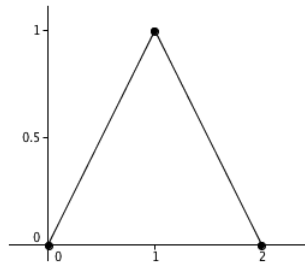
Se pueden ver estas funciones de pertenencia en la Figura 3.1.2.



(a) Función sigmoidea.



(b) Función gaussiana.



(c) Función triangular

FIGURA 3.1.2. Funciones de pertenencia habituales

Estamos particularmente interesados en los números borrosos trapezoidales normalizados, es decir, aquéllos cuya función de pertenencia es trapezoidal y de altura 1, ya que éstos se pueden representar mediante una tupla  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  con



### 3.1. NÚMEROS BORROSOS. ARITMÉTICA Y TOPOLOGÍA

---

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$  junto con la función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{A}} = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & \text{si } a_1 \leq x < a_2 \\ 1, & \text{si } a_2 \leq x < a_3 \\ \frac{x-a_4}{a_3-a_4}, & \text{si } a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & \text{si } a_4 < x \end{cases}.$$

Denotaremos por  $\mathbb{R}^{\mathcal{TF}}$  al conjunto formado por todos estos números, y por  $\mathbb{R}^{\mathcal{TFG}}$  a los números borrosos trapezoidales generalizados, que representaremos mediante una tupla  $(a_1, a_2, a_3, a_4; w)$  considerando la altura  $w \in [0, 1]$  del número borroso.

Nótese que, si además  $a_2 = a_3$ , entonces la función de pertenencia tiene forma triangular, por lo que los números borrosos trapezoidales extienden a los triangulares.

Representar los números borrosos trapezoidales mediante tuplas  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  nos permitirá definir operaciones aritméticas de una forma sencilla, así como extraer información borrosa de los expertos en los sistemas de ayuda a la decisión.

Los números borrosos normalizados extienden de modo natural a los números reales: El número  $a \in \mathbb{R}$  se puede representar mediante la función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq a \\ 1, & \text{si } x = a \end{cases}.$$

También los intervalos de números reales se pueden representar por medio de números borrosos: El intervalo  $A = [a, b]$  se puede representar por la función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [a, b] \\ 1, & \text{si } x \in [a, b] \end{cases}.$$

En particular, un número real  $a$  se puede escribir como número borroso trapezoidal normalizado como  $\tilde{a} = (a, a, a, a)$ , y el intervalo  $[a, b]$  de números reales se puede escribir como  $\tilde{A} = (a, a, b, b)$ .

### Aritmética, Orden y Relación de Subsumción de Números borrosos

**Normalizados** Las operaciones aritméticas usuales sobre los números borrosos son las siguientes:

Dados dos números borrosos trapezoidales normalizados  $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ :

$$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(z) = \sup_{x+y=z} \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y) \}$$

$$\mu_{\tilde{A} \otimes \tilde{B}}(z) = \sup_{xy=z} \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y) \}$$

$$\mu_{\tilde{A} \ominus \tilde{B}}(z) = \sup_{x-y=z} \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y) \}$$

$$\mu_{\tilde{A} \oslash \tilde{B}}(z) = \sup_{x/y=z} \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y) \}$$

En particular, en los números borrosos trapezoidales normalizados estas operaciones se pueden escribir de la siguiente forma:

- $(a_1, b_1, c_1, d_1) \oplus (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$
- $(a_1, b_1, c_1, d_1) \ominus (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2)$
- $(a_1, b_1, c_1, d_1) \otimes (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 \times a_2, b_1 \times b_2, c_1 \times c_2, d_1 \times d_2)$
- $(a_1, b_1, c_1, d_1) \oslash (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1/a_2, b_1/b_2, c_1/c_2, d_1/d_2)$  cuando tenga sentido.

Además, el conjunto de los números borrosos dispone de un orden parcial dado por:

$$\tilde{A} \preceq \tilde{B} \iff \tilde{A} = \tilde{\min}\{\tilde{A}, \tilde{B}\} \iff \mu_{\tilde{A}}(z) = \sup_{\min x, y=z} \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y) \} \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Tanto las operaciones aritméticas como el orden definido extienden a las operaciones aritméticas y al orden (total) [22] de los números reales.

Dados dos números borrosos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ , se dice que  $\tilde{A}$  está *subsumido* en  $\tilde{B}$ , y se denota por  $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$  si  $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

### 3.2. MODELADO LINGÜÍSTICO DIFUSO

---

**Topología de los Números borrosos Normalizados.** Dado un espacio métrico  $(X, d)$ , y dados  $A, B \subseteq X$  cerrados y acotados, se define la distancia de Hausdorff entre  $A$  y  $B$  como:

$$d_H(A, B) = \inf \left\{ r > 0 : \left[ A \subseteq \bigcup_{x \in B} B(x, r) \right] \wedge \left[ B \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r) \right] \right\}$$

donde  $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ .

Si denotamos por  $F_X$  al conjunto de todos los subconjuntos cerrados y acotados de  $X$  entonces se verifica que [22] si  $(X, d)$  es un espacio métrico completo, entonces  $(F_X, d_H)$  también es un espacio métrico completo, y puesto que todo subespacio métrico de un espacio métrico completo, es también completo, se tiene que el conjunto de todos los  $\alpha$ -cortes definidos anteriormente forman, con la distancia de Hausdorff, un espacio métrico completo [22]. Esta es la base para dotar de una estructura de Banach a los números borrosos:

El conjunto de los números borrosos forma un espacio métrico completo con la siguiente distancia [18, 22]:

$$d_\infty : \mathbb{R}^F \times \mathbb{R}^F \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d_\infty(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H(\tilde{A}_\alpha, \tilde{B}_\alpha).$$

Esta estructura permite definir la convergencia de una sucesión de números borrosos o el concepto de serie convergente, fundamental para poder definir un espacio probabilístico borroso, dado que el tercer axioma de Kolmogorov <sup>1</sup> trata con series convergentes.

### 3.2. Modelado Lingüístico Difuso

El uso de números borrosos y términos lingüísticos para la confección de sistemas expertos en los que no es posible aportar información nítida, o en los que es necesario

---

<sup>1</sup>Dada una familia de eventos disjuntos dos a dos  $E_i \in \mathcal{H}$  (con  $E_i \in \mathcal{H}$  una  $\sigma$ -álgebra del espacio muestral de un experimento aleatorio) con  $i \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $p\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(E_i)$ .

mezclar la información nítida con información borrosa (recordemos que los números reales se inyectan en los borrosos) constituye lo que podemos denominar modelado lingüístico borroso [20]. En esta sección vamos a identificar cuáles son los elementos de un modelo lingüístico borroso y cuáles son algunos de los problemas que los analistas pueden encontrar al tratar de establecerlos.

**Definición 3.5.** Una variable lingüística [39] es una tupla  $(A, T(A), U, G, M)$  donde:

- $A$  es el nombre de la variable.
- $T(A)$  es el conjunto de términos lingüísticos que puede tomar  $A$ .
- $U$  es el universo de discurso en el que valora  $A$ .
- $G$  es una regla sintáctica para la generación de los términos de  $T(A)$ .
- $M$  es una regla semántica para asociar un significado a cada valor.

Vamos a explicar cada uno de los elementos de esta tupla mediante un ejemplo: La velocidad de un automóvil es una variable cuantitativa que puede tomar los valores de 0 km/h a 120 km/h. Si consideramos a la velocidad como una variable lingüística, este rango de valores constituye el universo de discurso ( $U$ ) de la variable,  $T(velocidad)$  es un conjunto de términos lingüísticos que puede tomar, como “parado”, “lento” o “extremadamente rápido”.  $G$  la constituyen los nombres elegidos para  $T(velocidad)$  y  $M$  son los números borrosos cuyas etiquetas son los términos lingüísticos de  $T(velocidad)$ .

Un modelo lingüístico para el establecimiento de un sistema de ayuda a la decisión consta de dos partes [20]

1. Un modelo de representación. Conjunto de términos lingüísticos y números borrosos que los representan ( $G$  y  $M$ ).
2. Un modelo computacional. Conjunto de operadores de agregación, comparación y aritméticos útiles para tratar la información aportada por los expertos.

El modelo de representación constituye el *problema de la granularidad de la incertidumbre* [5, 20]. Consiste en determinar un número adecuado de términos lingüísticos

### 3.3. EL MODELO COMPUTACIONAL Y LA FUNCIÓN DE SIMILITUD

---

y números borrosos suficientemente alto como para representar la precisión que el experto puede declarar y suficientemente bajo como para que el experto no dude entre dos términos consecutivos. Lo habitual es utilizar escalas con un número impar de términos, entre 5 y 9. La cardinalidad de este conjunto es la *granularidad* del modelo.

Además, es importante determinar la forma y tamaño que han de tener los números borrosos que vamos a utilizar. A números más borrosos (con un mayor soporte) menor granularidad. Veamos un ejemplo:

En Vicente et al. [60] puede verse un árbol de fallos (Figura 3.2.1) utilizado en el análisis de riesgos por Dokas et al. [16]. Los expertos deben asignar probabilidades de fallos a los eventos BE1, BE2 y BE3. A partir de estas probabilidades, por medio de la aritmética borrosa indicada en la sección anterior y siguiendo las puertas lógicas del árbol, se debe calcular la probabilidad de que falle el *top event* (TE). Dokas et al. proponen la escala de la Figura 3.2.2(a), que puede verse con detalle en la Tabla 3.2.1, y suponen que los expertos asignan los términos lingüísticos “Bajo”, “Medio” y “Alto” respectivamente a las probabilidades de fallo de los eventos B1, B2 y B3. Con su escala resulta que la probabilidad de fallo del *top event* (TE) es (0.35, 0.52, 0.52, 0.68). Sin embargo, con la escala de Vicente et al. (Figura 3.2.2(a), Tabla 3.2.1), el resultado es (0.26, 0.41, 0.59, 0.73). De este modo se ve que la elección de los números borrosos que se van a utilizar puede llevar a resultados muy diferentes. Además la escala utilizada para un experto puede no ser la escala más adecuada para otro experto, puesto que es posible (y habitual) que dos expertos tengan visiones más o menos claras (nítidas) de la probabilidad de materialización de un evento.

### 3.3. El Modelo Computacional y la Función de Similitud

En el ejemplo dado en la sección anterior, ponemos de manifiesto, no sólo el problema de la granularidad y la elección de números borrosos, sino el hecho de que

los operadores dados por el modelo computacional sobre los números borrosos del modelo de representación no tienen por qué llevar a resultados en el mismo modelo de representación. De hecho, se observa que tanto si usamos la escala de Dokas et al., como la propuesta en Vicente et al., los números borrosos no están en sus respectivas escalas. En la Figura 3.3.1 observamos el resultado (rayado) sobre la

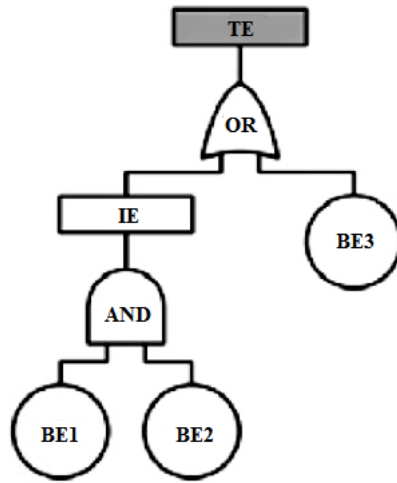
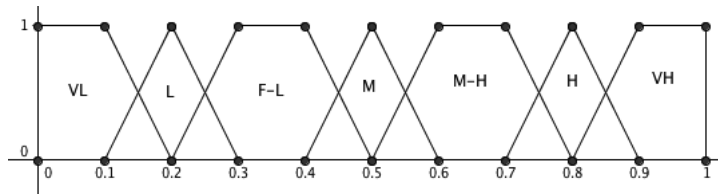
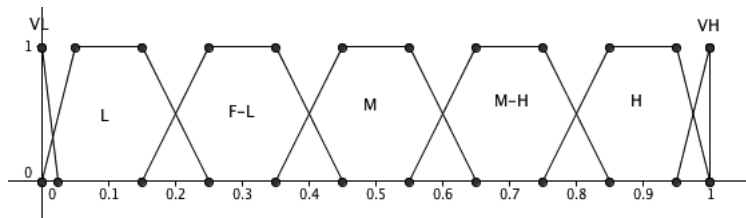


FIGURA 3.2.1. Árbol de fallos de Dokas et al. [16]



(a) Escala de Dokas et al..



(b) Escala alternativa de Vicente et al..

FIGURA 3.2.2. Posibles escalas para el árbol de fallos de Dokas et al..

### 3.3. EL MODELO COMPUTACIONAL Y LA FUNCIÓN DE SIMILITUD

escala de Vicente et al.

Entonces, hemos de trasladar el resultado al modelo de representación elegido. Esto se hace por medio de una función de similitud de números borrosos. Parece obvio que el resultado del árbol de fallos es una probabilidad media en la escala de Vicente et al., pero esta obviedad se debe a la similitud que existe entre el número borroso correspondiente a la etiqueta “Medio” y el resultado obtenido. Precisamente uno de los objetivos principales de esta tesis consiste en proponer una función que indique la similitud entre dos números borrosos trapezoidales, mejorando las funciones actuales. Profundizaremos en estas ideas en el Capítulo 4.

Término lingüístico (G)	Dokas et al. [16]	Vicente et al. [60]
Muy Bajo (VL)	(0, 0, 0.1, 0.2)	(0, 0, 0, 0.025)
Bajo (L)	(0.1, 0.2, 0.2, 0.3)	(0, 0.05, 0.15, 0.25)
Medio Bajo (FL)	(0.2, 0.3, 0.4, 0.5)	(0.15, 0.25, 0.35, 0.45)
Medio (M)	(0.4, 0.5, 0.5, 0.6)	(0.35, 0.45, 0.55, 0.65)
Medio Alto (FH)	(0.5, 0.6, 0.7, 0.8)	(0.55, 0.65, 0.75, 0.85)
Alto (H)	(0.7, 0.8, 0.8, 0.9)	(0.75, 0.85, 0.95, 1)
Muy Alto (VH)	(0.8, 0.9, 1, 1)	(0.95, 1, 1, 1)

TABLA 3.2.1. Escalas para la asignación de probabilidades en el ejemplo del árbol de fallos.

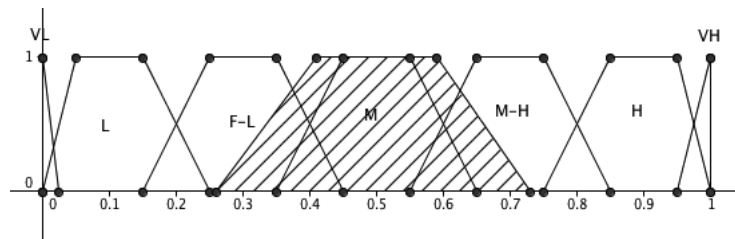


FIGURA 3.3.1. Resultado del árbol de fallos sobre la escala de Vicente et al..

### 3.4. Educción de Probabilidades Mediante Números borrosos

El uso de escalas de términos lingüísticos representados por números borrosos es muy común en los sistemas de ayuda a la decisión en ambiente borroso. Sin embargo, este tipo de escalas en el modelo de representación provocan una pérdida de información al discretizar los espacios de valoración y anclar la atención de los expertos y decisores sobre números borrosos previamente establecidos, con una amplitud de soporte y una forma que no han sido, en general, determinados por ellos, sino por el analista. El uso de escalas de términos lingüísticos es útil al final de un proceso de educación y elicitación para normalizar los resultados de dichos procesos mediante funciones de similitud de números borrosos, y es fundamental en la implementación de sistemas de control borroso, pero pedir a expertos y decisores que elijan entre cinco o siete números borrosos previamente establecidos para hacer sus valoraciones en los sistemas de ayuda a la decisión, no es eficiente.

Por otro lado, la asignación directa de probabilidades no está en general recomendado, por los protocolos usuales de educación de probabilidades subjetivas, como el SRI (Standford Research Institute)[43, 55, 56], ya que la asignación directa no previene los sesgos que se pudieran cometer.

En esta sección proponemos un nuevo método interactivo (indirecto) cuyo objetivo es extraer de decisores y expertos un número borroso que indique la probabilidad subjetiva de un suceso, y que permita el establecimiento de variables aleatorias borrosas sobre el espacio muestral de un experimento aleatorio. Este método evita la discretización de los espacios de valoración y el uso de números borrosos con amplitud de soporte y forma previamente establecidos, permitiendo a cada decisor y experto una mayor o menor precisión en sus juicios probabilísticos y valoración de utilidades.

Además estableceremos una función que mide la calidad del juicio probabilístico expresado por el experto mediante la agregación de dos componentes que miden la coherencia y la seguridad mostrada por el experto durante el proceso de educación.



### 3.4. EDUCIÓN DE PROBABILIDADES MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

**3.4.1. De la Teoría Clásica de la Probabilidad a la Teoría de la Probabilidad Lingüística.** Toda la Teoría Clásica de la Probabilidad se puede construir a partir de los bien conocidos axiomas de Kolmogorov.

Dados un espacio de eventos (espacio muestral) de un experimento aleatorio  $\Omega$ , y una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$  sobre  $\Omega$ , se dice que  $p : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  es una medida de probabilidad si verifica los siguientes axiomas:

- Axioma 1:  $p(E) \in [0, 1] \forall E \in \mathcal{H}$ .
- Axioma 2:  $p(\Omega) = 1$ .
- Axioma 3: Dada una familia de eventos disjuntos dos a dos  $E_i \in \mathcal{H}$ , con  $i \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $p\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(E_i)$ .

A partir de estos tres axiomas, se pueden demostrar las siguientes propiedades:

1.  $p(E^c) = 1 - p(E) \forall E \in \mathcal{H}$ , siendo  $E^c$  el suceso complementario de  $E$ , es decir, tal que  $E \cup E^c = \Omega$ .
2.  $p(\emptyset) = 0$ , siendo  $\emptyset$  un suceso imposible.
3.  $E \subseteq F \implies p(E) \leq p(F)$ .
4.  $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$ .

El tercer axioma de Kolmogorov implica que la serie  $\sum_{i \in \mathbb{N}} p(A_i)$  debe ser convergente. Podemos utilizar términos de convergencia gracias a que en  $\mathbb{R}$ , y en particular en  $[0, 1]$ , tenemos una estructura de espacio métrico, dado por la distancia euclídea  $d(x, y) = |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Además, el espacio  $(\mathbb{R}, d)$  es un espacio métrico completo (toda sucesión de Cuachy en  $(\mathbb{R}, d)$  es convergente).

Un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{H}, p)$  es una terna formada por el espacio de eventos  $\Omega$  de un experimento aleatorio, una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{H}$  sobre el espacio de eventos y una probabilidad  $p$  sobre  $\mathcal{H}$ .

Una vez establecido un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{H}, p)$  se pueden definir variables aleatorias que modelicen cuantitativamente la incertidumbre asociada a los experimentos, se puede definir la probabilidad de un evento condicionado a la ocurrencia de otro, o se puede contrastar la veracidad de una afirmación, etcétera.

Nuestro objetivo en esta sección es extender la teoría clásica al paradigma borroso, de modo que podamos definir una variable aleatoria lingüística.

Las primeras ideas sobre probabilidades borrosas son de Zadeh [68]. Sin embargo, Zadeh asigna un valor crisp para dar la probabilidad a partir de la función de pertenencia de un *evento borroso* (definido por una función de pertenencia), de modo que utiliza las reglas de la probabilidad clásica con números reales de  $[0,1]$  a través de los axiomas de Kolmogorov. Enfoques similares, en que una variable aleatoria borrosa se define como una función sobre un espacio clásico de probabilidad que valora en los números borrosos, pueden verse en [32, 33, 19, 48]

Nosotros queremos realizar un proceso contrario, es decir, asignar un número borroso como probabilidad de un suceso que no tiene por qué estar definido por medio de una función de pertenencia. En este sentido utilizaremos la Teoría de la Probabilidad Lingüística desarrollada por Halliwell en su tesis doctoral [22].

Los tres axiomas de Kolmogorov se pueden extender a los números borrosos normalizados de la siguiente forma:

Un espacio probabilístico borroso es una terna  $(\Omega, \mathcal{H}, p^{\mathcal{F}})$  formada por el espacio de eventos  $\Omega$  de un experimento aleatorio, una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{H}$  sobre el espacio de eventos y una función  $p^{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ , verificando:

- Axioma 1:  $\tilde{0} \leq p^{\mathcal{F}}(E) \leq \tilde{1}. \forall E \in \mathcal{H}$
- Axioma 2:  $p^{\mathcal{F}}(\Omega) = \tilde{1}$ .
- Axioma 3: Dada una familia de eventos disjuntos dos a dos  $E_i \in \mathcal{H}$ , con  $i \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $p^{\mathcal{F}}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) \subseteq \sum_{i \in \mathbb{N}} p^{\mathcal{F}}(E_i)$ .

La aritmética usual de números borrosos normalizados dada anteriormente carece de elementos inversos respecto a las operaciones  $\oplus$  y  $\otimes$ . Esto imposibilita la adaptación de la propiedad 2 dada anteriormente. Por tanto, es necesario incluir un cuarto axioma en la Teoría de la Probabilidad Lingüística, para que ésta pueda extender a la teoría clásica:

- Axioma 4:  $p^{\mathcal{F}}(A^c) = \tilde{1} \ominus p^{\mathcal{F}}(A)$ .

### 3.4. EDUCIÓN DE PROBABILIDADES MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

Con estos cuatro axiomas se verifican las siguientes propiedades:

1.  $p^{\mathcal{F}}(\emptyset) = \tilde{0}$  siendo  $\emptyset$  un suceso imposible. Basta aplicar los axiomas 4 y 2.
2.  $E \subseteq F \implies p^{\mathcal{F}}(E) \leq p^{\mathcal{F}}(F)$ . La demostración puede verse en [22].
3.  $p^{\mathcal{F}}(E \cup F) \subseteq p^{\mathcal{F}}(E) + p^{\mathcal{F}}(F) - p^{\mathcal{F}}(E \cap F)$ . Similar al caso real.

**Relación con la Probabilidad Clásica.** Dada una medida de probabilidad clásica  $p : \mathcal{H} \longrightarrow [0, 1]$  entonces  $p^{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \longrightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$  definida por  $p^{\mathcal{F}}(E) = p(\tilde{E})$  es una medida de probabilidad borrosa, y recíprocamente, dada una medida de probabilidad borrosa  $p^{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \longrightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$  tal que  $p^{\mathcal{F}}(E) = p(\tilde{E})$  para algún  $p(E) \in \mathbb{R}$ , entonces  $p$  es una medida de probabilidad clásica.

**Variable Aleatoria Borrosa y Teorema de Representación.** Una variable aleatoria borrosa es una función  $X : (\Omega, \mathcal{H}, p^{\mathcal{F}}) \longrightarrow D_X$  de un espacio de probabilidad borroso  $(\Omega, \mathcal{H}, p^{\mathcal{F}})$  en un universo de discurso  $D_X$  tal que  $X^{-1}(x) \in \mathcal{H}$ ,  $\forall x \in D_X$ . En particular, si la imagen de  $X$  es un conjunto numerable entonces, se dice que la variable es discreta.

La función de masa de una variable aleatoria discreta es una función  $f : X \longrightarrow [0, 1]^{\mathcal{F}}$  definida por  $f(x) = p^{\mathcal{F}}(w \in \Omega : X(w) = x)$ .

En la Teoría Clásica de la Probabilidad es conocido que un conjunto de valores  $\pi_i \in [0, 1]$  numerable, tal que  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \pi_i = 1$ , es la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta  $\chi$  que tiene un conjunto numerable de estados  $d_i$  con probabilidad  $P_{\chi}(d_i) = \pi_i$ . El equivalente borroso de este teorema es el siguiente:

**Teorema de representación [22]** Si  $D = \{d_i : i \in I\}$  es un conjunto finito no vacío y  $\{\tilde{\pi}_i : i \in I\}$  es un conjunto de números borrosos tales que  $\forall i \in I \tilde{0} \leq \tilde{\pi}_i \leq \tilde{1}$  y  $\tilde{\pi}_i \subseteq \tilde{1} \ominus \left[ \bigoplus_{j \neq i} \tilde{\pi}_j \right] \in \mathbb{R}^F$ , entonces existe un espacio probabilístico borroso  $(\Omega, \mathcal{H}, p^{\mathcal{F}})$  y una variable aleatoria borrosa discreta  $X$  sobre este espacio probabilístico tal que su función de masa es

$$f(d) = \begin{cases} \tilde{\pi}_i & \text{si } d = d_i \text{ para algún } i \in I \\ \tilde{0} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Ejemplos.** A continuación describimos la función de masa difusa de algunas variables sencillas.

1. Los números borrosos triangulares  $\tilde{\pi}_1 = (0, 0.1, 0.2)$ ,  $\tilde{\pi}_2 = (0.25, 0.3, 0.35)$  y  $\tilde{\pi}_3 = (0.55, 0.6, 0.65)$  forman la función de masa de una variable aleatoria discreta que tiene tres estados con probabilidades  $\tilde{\pi}_1$ ,  $\tilde{\pi}_2$  y  $\tilde{\pi}_3$ , respectivamente. Probabilidades similares se pueden expresar mediante los números trapezoidales  $\tilde{\pi}_1 = (0, 0.05, 0.15, 0.2)$ ,  $\tilde{\pi}_2 = (0.25, 0.27, 0.33, 0.35)$  y  $\tilde{\pi}_3 = (0.55, 0.57, 0.63, 0.65)$ .
2. Los números borrosos trapezoidales  $\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = (0.35, 0.45, 0.55, 0.65)$  forman la función masa de una variable aleatoria binaria en la que los sucesos “éxito” y “fracaso” tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Del mismo modo  $\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  es la función de masa de una variable dicotómica en la que los sucesos elementales (complementarios) tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Este segundo caso constituye una percepción nítida de la probabilidad, de modo que el primer caso es más borroso y, por tanto, la expresión de la probabilidad mediante estos valores es de menor calidad que la expresión de la probabilidad mediante el segundo caso. Nos ocuparemos de esta cuestión más adelante.
3. Nótese que si los dos sucesos de un experimento aleatorio dicotómico tienen la misma probabilidad de ocurrencia, entonces la probabilidad de ambos debe verse con la misma borrosidad, ya que, de la probabilidad de uno se deduce la del contrario. Es decir, en este caso, no puede ocurrir, por ejemplo, que  $\tilde{\pi}_1 = (0.35, 0.45, 0.55, 0.65)$  y  $\tilde{\pi}_2 = (0.3, 0.45, 0.55, 0.7)$ .
4. Los números borrosos trapezoidales  $\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_3 = (\frac{1}{4}, \frac{6}{21}, \frac{8}{21}, \frac{1}{2})$  forman la función de masa de una variable aleatoria discreta que tiene tres estados con la misma probabilidad.

**3.4.2. Asignación de Probabilidades Reales mediante Apuestas y Loterías.** El protocolo SRI [43], aunque relativamente antiguo, es el protocolo más

### 3.4. EDUCIÓN DE PROBABILIDADES MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

influyente en la elicitación individual de los juicios probabilísticos de expertos. Algunas guías recientes que toman como base este protocolo se pueden consultar en [56, 55].

El protocolo original consta de cinco fases, aunque ha sido ampliado a siete fases a principios de la década de 1990 para incluir asignación de juicio experto de manera colectiva [42].

De forma resumida, las cinco fases en que se divide el protocolo individual SRI son las siguientes:

1. Fase de *Motivación*. El analista introduce al experto en la tarea de asignación de probabilidades, tratando de hacerle comprender la importancia del mismo. Se explican superficialmente algunos métodos que se pueden utilizar o los tipos de sesgos que se pueden cometer.
2. Fase de *Estructuración*. Se trata de clarificar y definir las variables que se van a tratar, las escalas que se van a utilizar, si es necesario descomponer el proceso teniendo en cuenta dependencias entre algunas variables,...
3. Fase de *Condicionamiento*. Se trata de explorar en profundidad los sesgos que se pudieran cometer para evitarlos en la fase de codificación de probabilidades.
4. Fase de *Codificación*. En esta fase se pone en práctica un método conveniente de elicitación de probabilidades.
5. Fase de *Verificación*. Se trata de contrastar si el experto está realmente de acuerdo con los juicios probabilísticos extraídos en la fase anterior.

Otros protocolos derivados del SRI son el SNL/NUREG-1150 [54] de la U.S. Nuclear Regulatory Commission y el KEEJAM [13] del Joint Research Center de la Comisión Europea.

Como vemos, la elicitación de probabilidades se realiza en la fase de codificación del protocolo SRI. Mediante la asignación de probabilidades subjetivas, se trata de establecer la función de probabilidad en el caso de una variable discreta y la función

de distribución en el caso de que la variable aleatoria sea continua. En ambos casos se pueden desarrollar métodos directos o indirectos.

Los *métodos directos* para la determinación de una función de probabilidad, en el caso discreto, consisten en encontrar un sistema completo de sucesos disjuntos dos a dos, y preguntar directamente al experto por la probabilidad de cada uno de los sucesos que forman dicho sistema. Es necesario garantizar los axiomas de Kolmogorov, ya que, de lo contrario, el experto no es coherente en sus juicios probabilísticos.

En el caso continuo, los métodos directos consisten en preguntar al decisor por algunos percentiles de la distribución de probabilidad que se está elicitando.

Estos métodos directos son muy rápidos y fáciles de implementar, sin embargo, tienen el inconveniente de que no evitan los sesgos que se pueden producir durante el proceso de educación.

Los *métodos indirectos*, en el caso discreto, consisten en presentarle al experto la posibilidad de participar en dos juegos diferentes en los cuales se ganan o se pierden determinadas cantidades monetarias con ciertas probabilidades, comparadas con las probabilidades del suceso bajo estudio. El experto debe elegir en qué juego desea participar, y si es coherente elegirá siempre aquella alternativa que le resulte más favorable. El analista cambiará iterativamente las condiciones de los juegos propuestos y aprovechará las respuestas del decisor en cada iteración para inferir la probabilidad de  $A$ . Se desarrolla así un proceso que culmina con un par de juegos entre los que el experto es indiferente, y en este momento resulta fácil dar un valor para la probabilidad de  $A$ .

El analista puede cambiar las condiciones de los juegos modificando cantidades monetarias o probabilidades. Si cambia cantidades monetarias, el método se denomina *de educación mediante apuestas*. Si se modifican las probabilidades, se denomina *de educación mediante loterías*.

**Asignación basada en apuestas** Para asignar las probabilidades de un suceso  $A$  mediante este método (Figura 3.4.1(a)) tomamos dos cantidades monetarias  $x$  e  $y$  y presentamos al experto las siguientes apuestas:

### 3.4. EDUCACIÓN DE PROBABILIDADES MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

---

- Primera Apuesta:
  - Si ocurre el suceso  $A$  usted gana  $x$ .
  - Si no ocurre  $A$ , usted pierde  $y$  (gana  $-y$ ).
- Segunda Apuesta:
  - Si ocurre  $A$ , usted pierde  $x$  (gana  $-x$ ).
  - Si no ocurre  $A$ , usted gana  $y$ .

Ahora se le pregunta qué apuesta prefiere. Si ambas apuestas son indiferentes para el decisor entonces la ganancia esperada en ambas es la misma:

$$xP(A) - yP(A^c) = -xP(A) + yP(A^c),$$

de donde

$$P(A) = \frac{y}{x+y}.$$

Si prefiere la primera apuesta entonces la ganancia esperada de dicha apuesta es mayor que la ganancia esperada de la segunda, y por tanto:

$$xP(A) - yP(A^c) > -xP(A) + yP(A^c),$$

de donde

$$P(A) > \frac{y}{x+y}.$$

En este caso habría que aumentar el valor de  $y$  o reducir el valor de  $x$  y volver a presentar las apuestas al decisor. El proceso se repite hasta encontrar dos apuestas indiferentes que nos permitan asignar la probabilidad de  $A$ .

**Asignación basada en loterías.** Si en lugar de cambiar los valores monetarios modificamos las probabilidades obtenemos el método basado en loterías (Figura 3.4.1 (b)), que consiste en lo siguiente:

Se consideran un premio muy bueno,  $T$ , y un premio muy malo,  $W$ , y a continuación, se presentan al experto las siguientes loterías:

- Primera Lotería:
  - Si ocurre el suceso  $A$ , usted gana el premio  $T$ .
  - Si no ocurre el suceso  $A$ , usted gana el premio  $W$ .

■ Segunda Lotería:

- Con probabilidad  $p$  usted gana el premio T.
- Con probabilidad  $1 - p$  usted gana el premio W.

Si el experto prefiere la primera lotería es porque piensa que  $P(A) > p$ , por tanto, debemos incrementar  $p$ . Si prefiere la segunda lotería es porque piensa que  $P(A) < p$  y debemos reducir  $p$ . Así hasta que encuentre dos loterías que sean indiferentes para el experto. Llegado ese momento  $P(A) = p$ .

A la segunda lotería se la suele denominar *lotería de referencia*.

Para este segundo método es muy común utilizar artilugios físicos que permitan al experto visualizar la magnitud de las probabilidades que se le están ofreciendo. El artilugio más usual es el de la rueda de la probabilidad (Figura 3.4.2), que consiste en un círculo con dos sectores circulares que designan  $p$  y  $1 - p$ . Según las respuestas del experto, el radio que delimita los sectores  $p$  y  $1 - p$  se gira para ampliar o reducir las probabilidades ofrecidas en el proceso iterativo.

Una vez que hemos asignado la probabilidad a un suceso se puede continuar con otro suceso disjunto al anterior y así sucesivamente. Al final todas las probabilidades

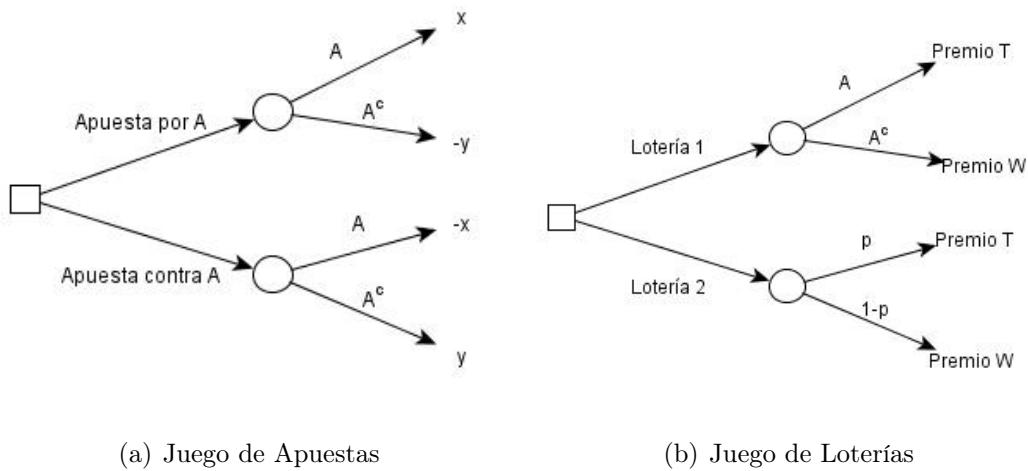


FIGURA 3.4.1. Juegos de apuestas y lotería para la asignación de probabilidades



### 3.4. EDUCIÓN DE PROBABILIDADES MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

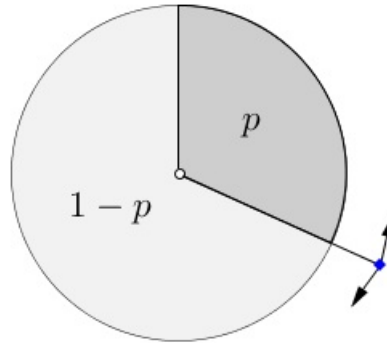


FIGURA 3.4.2. Rueda de la probabilidad para asignar probabilidades

deben sumar 1. Si no fuera así el experto no sería coherente ya que estamos definiendo la función de masa subjetiva de una variable aleatoria discreta.

Los métodos indirectos de apuestas y loterías también son útiles en la elicitación de las funciones de distribución en el caso continuo. Estos métodos consisten en determinar las probabilidades acumuladas mediante el uso de loterías y apuestas. Destacan el método *Fixed Probability* (FP) y el *Fixed Variable Value* (FV) [1, 51].

Vemos que los métodos de loterías y apuestas son bastante usuales, tanto en la elicitación de probabilidades de variables discretas, como en variables continuas. De hecho, la mayoría de los programas de software de análisis de decisiones disponen de una rueda de probabilidad que permite desarrollar estos métodos con el experto. Buenos ejemplos son GeNie, DATA, DPL y MSBN [62].

**3.4.3. Asignación de Probabilidades Borrosas mediante Apuestas y Loterías.** Los métodos de apuestas y loterías son elegantes, ingeniosos, útiles y fáciles de entender por parte de los expertos que deben asignar probabilidades, sin embargo, no están libres de inconvenientes. Veamos un ejemplo de entrevista analista-experto en el que se desarrolla el método de las loterías para asignar la probabilidad de un suceso  $A$ :

- Pregunta 1 (analista): (Figura 3.4.3(a)) Si ocurre el suceso  $A$  usted gana 1000 euros, y si no ocurre el suceso  $A$  usted gana el premio -100 euros. Con probabilidad  $p = 0.25$  usted gana el premio 1000 euros, y con  $1 - p = 0.75$  usted gana el premio -100 euros. ¿Qué lotería prefiere?
- Respuesta 1 (experto): La lotería 1.

El analista entiende que  $p(A) > 0.25$  e incrementa el valor de  $p$  (Figura 3.4.3(b)).

El diálogo continúa:

- Pregunta 2 (analista): (Figura 3.4.3(c)) Si ocurre el suceso  $A$  usted gana 1000 euros, y si no ocurre el suceso  $A$  usted gana el premio -100 euros. Con probabilidad  $p = 0.5$  usted gana el premio 1000 euros, y con  $1 - p = 0.5$  usted gana el premio -100 euros. ¿Qué lotería prefiere?
- Respuesta 2 (experto): La lotería 1.

El analista entiende que  $p(A) > 0.5$  e incrementa el valor de  $p$  (Figura 3.4.3). El diálogo continúa:

- Pregunta 3 (analista): (Figura 3.4.3(c)) Si ocurre el suceso  $A$  usted gana 1000 euros, y si no ocurre el suceso  $A$  usted gana el premio -100 euros. Con probabilidad  $p = 0.75$  usted gana el premio 1000 euros, y con  $1 - p = 0.25$  usted gana el premio -100 euros. ¿Qué lotería prefiere?
- Respuesta 3 (experto): Me es indiferente.

Llegado este punto el analista, siguiendo el método de Savage, diría que la probabilidad de  $A$  es  $P(A) = 0.75$ . Sin embargo ¿podemos inferir que  $p(A) \neq 0.6, 0.65, 0.8, 0.85$ ? Obviamente no. Porque no hemos preguntado por estos valores. Podría ocurrir que el experto también fuera indiferente a loterías de referencia con estos valores. Entonces sería necesario hacer preguntas con valores en torno a 0.75 para ver hasta dónde llega la indiferencia del experto en la asignación de probabilidades. Así, si el experto no está completamente seguro (que es lo más normal) de que la probabilidad sea exactamente 0.75, continuaríamos la entrevista con valores cercanos a 0.75 hasta

### 3.4. EDUCIÓN DE PROBABILIDADES MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

romper la indiferencia tanto a la izquierda como a la derecha del 0.75. Así, obtendremos un sector circular en la rueda de la fortuna (Figura 3.4.4) que constituye una frontera borrosa entre las probabilidades  $P(A)$  y  $P(A^c)$ , indicando la vaguedad y la imprecisión del experto al asignar la probabilidad.

El proceso terminará en un intervalo  $[a, c]$  en el que debe estar la frontera entre ambos conjuntos.

Los protocolos usuales sobre educación de probabilidades, como el citado SRI, recomiendan utilizar varios métodos de asignación de probabilidades para evaluar la consistencia y la coherencia de las probabilidades dadas por el experto.

El método basado en apuestas expuesto anteriormente puede complementar a este método de las loterías para conseguir tal efecto. Si en cada pregunta cambiamos las cantidades (premios T y W) en lugar de las probabilidades podemos obtener igualmente un intervalo de indiferencia en el que el experto es incapaz de identificar la probabilidad del suceso con seguridad. Ambos métodos no tienen por qué dar exactamente los mismos resultados por motivos psicológicos. Sin embargo, si los intervalos obtenidos por ambos métodos son disjuntos, entonces las asignaciones aportadas por el decisor mediante ambos métodos no son consistentes, mientras que si existe intersección entre los intervalos que resultan de ambos métodos, entonces parece claro que el experto ve con más claridad que la probabilidad solicitada podría estar en esa intersección, y que fuera de ella, cabe la posibilidad de que esté pero con menor seguridad según nos alejamos de la intersección. Esto nos lleva al establecimiento de un número borroso trapezoidal.

Supongamos que del método de la lotería resulta  $[a, c]$  y del método de la apuesta resulta  $[b, d]$ .

- Si  $[a, c] \cap [b, d] = \emptyset$ , entonces el experto es incoherente.
- Si  $[a, c] \cap [b, d] \neq \emptyset$ , entonces:

- Si ninguno de los intervalos está contenido en el otro, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $a < b \leq c < d$ . Entonces, el experto piensa que la probabilidad del suceso es el número borroso trapezoidal  $\tilde{\pi} = (a, b, c, d)$ .
- Si uno de los intervalos está contenido en otro, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $[a, c] \subseteq [b, d]$ . Entonces, el experto piensa que la probabilidad del suceso es el número borroso trapezoidal  $\tilde{\pi} = (b, a, c, d)$ .

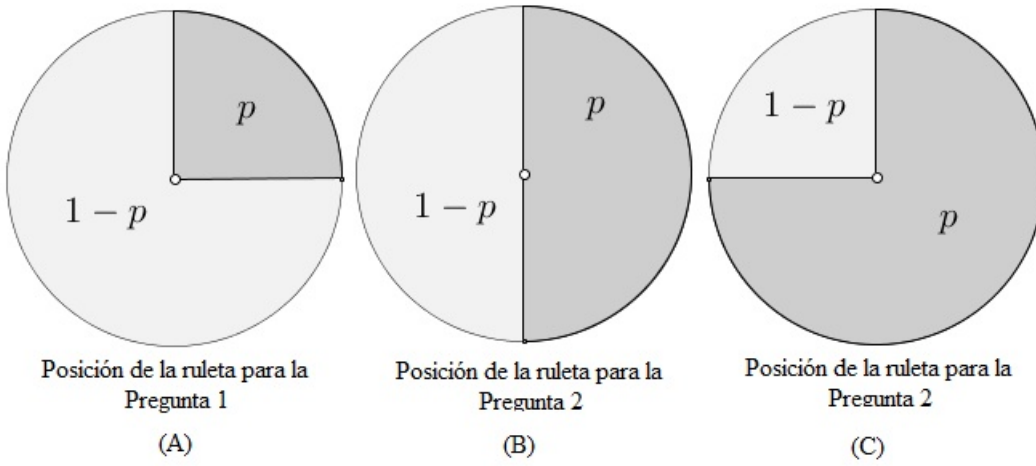


FIGURA 3.4.3. Posiciones de la rueda de la probabilidad.

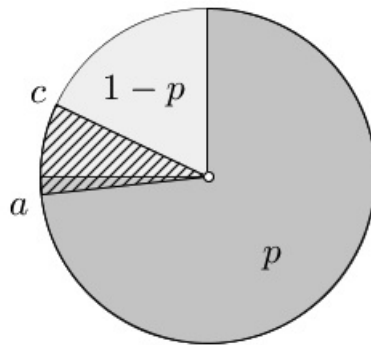


FIGURA 3.4.4. Frontera borrosa en la rueda de la probabilidad.

### 3.4. EDUCIÓN DE PROBABILIDADES MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

Una vez que el experto ha asignado la probabilidad a un suceso, se le pide la probabilidad de otro suceso disjunto con el anterior, para lo cual se vuelven a desarrollar los dos métodos anteriores. Ahora bien, al igual que en el caso real exigíamos que la suma de las probabilidades de los sucesos (disjuntos dos a dos) fuera 1, en el paradigma borroso hemos de exigir que se verifiquen las condiciones del teorema de representación dado en la Sección 3.4.1, es decir que:

$$\tilde{\pi}_i \subseteq \tilde{1} \ominus \left[ \bigoplus_{j \neq i} \tilde{\pi}_j \right],$$

siendo  $\tilde{\pi}_i$  las probabilidades asignadas sucesivamente a los eventos (recordemos que la aritmética usual de números borrosos impide la resolución de ecuaciones sencillas ya que no existe elemento inverso respecto de las operaciones  $\oplus$  y  $\otimes$ ).

De esta manera, en virtud del citado teorema, definimos una variable aleatoria discreta borrosa.

**3.4.4. Calidad de la Información. Medidas de Borrosidad y de Coherencia de los Expertos.** Uno de los mayores inconvenientes de los sistemas expertos radica en los sesgos informativos que pueden cometer los expertos. Un trabajo pionero, y tremendamente influyente, en el estudio de estos sesgos corresponde a Tverky y Kahneman [53] que defienden que el ser humano construye heurísticas o reglas empíricas para asignar las probabilidades planteadas.

Estas reglas que, en general, pueden conducir a buenas estimaciones optimizando el esfuerzo dedicado, sin embargo pueden estar influidas por diversas circunstancias en el momento en que se desarrollan las entrevistas analista-decisor, introduciendo sesgos que dificultan la bondad de la asignación.

Las heurísticas más comunes son las de *disponibilidad* (el experto sobrevalora la probabilidad de eventos que se han producido recientemente), *representatividad* (los expertos tienden a olvidar la representatividad de diversas clases de individuos en una población, sucesos raros con consecuencias importantes suelen ser más recordados, y su probabilidad se sobrestima) y de *anclaje y ajuste* (subestimación de sucesos disjuntos, sobreestimación de sucesos simultáneos, exceso de confianza,...).

La razón de utilizar los métodos indirectos de elicitación de probabilidades consiste, precisamente, en reducir la influencia de las heurísticas utilizadas por el experto, que le llevan a incluir sesgos en sus juicios probabilísticos. Además, los protocolos de elicitación usuales recomiendan el uso de varios métodos con objeto de poder contrastar la información suministrada con cada uno de ellos y poder discutir los resultados con el experto, o valorar la calidad de la información suministrada. De este modo, el método propuesto en la Sección 3.4.3 para la obtención de un número borroso que indique el juicio probabilístico del experto, cumple con dichas recomendaciones. Además, la construcción de dicho número borroso permite valorar cuantitativamente la calidad de la información aportada.

A continuación vamos a proponer dos medidas que informan sobre la coherencia y la seguridad del experto en su juicio probabilístico. Finalmente, agregaremos ambas medidas en una función que indique la calidad de la información aportada.

**Coherencia del Experto.** Como decíamos en la Sección 3.4.3, el experto es incoherente si  $[a, c] \cap [b, d] = \emptyset$ , pero si  $[a, c] \cap [b, d] = \{\xi\}$  entonces el número borroso que designa el juicio probabilístico dado por el experto es un número borroso triangular  $(a, \xi, d)$ , ya que  $\xi = b = c$ .

Sin embargo ¿podemos decir que el experto es incoherente si  $[a, c] \cap [b, d] = \emptyset$ , y no lo es si  $[a, c] \cap [b, d] = \{\xi\}$ ? Obviamente no, ya que ambas situaciones son prácticamente iguales. De modo que los números borrosos triangulares también representan situaciones de incoherencia, ya que la intersección de los intervalos es un único número real, de hecho, podemos afirmar que el número triangular representa el límite entre la coherencia y la incoherencia en los juicios probabilísticos dados por los métodos de apuestas y loterías.

Por contra, si  $[a, c] = [b, d]$  el experto ha sido completamente coherente, y el número borroso que designa su juicio probabilístico es un número rectangular (un intervalo nítido).

### 3.4. EDUCIÓN DE PROBABILIDADES MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

Entonces la forma del número borroso (rectangular, trapezoidal propiamente dicho, o triangular) indica la coherencia del juicio proporcionado por el experto, y de este modo, podemos medir la coherencia mediante la siguiente función:

Dado un número borroso trapezoidal normalizado  $\tilde{A} = (a, b, c, d) \in [0, 1]^{\mathcal{TF}}$  que denota el juicio probabilístico de un experto para un evento determinado. Llamaremos *coherencia* de  $\tilde{A}$  a

$$C(\tilde{A}) = \begin{cases} \frac{c-b}{d-a}, & \text{si } \max \{(d-a), (c-b)\} \neq 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

#### Propiedades de la coherencia expresada por el experto:

1.  $C(\tilde{A}) \in [0, 1] \forall \tilde{A} \in [0, 1]^{\mathcal{TF}}$
2.  $C(\tilde{A}) = 1$  si y sólo si  $\tilde{A}$  es un número nítido. En particular la coherencia de cualquier intervalo real (visto como número borroso) contenido en  $[0, 1]$  es 1.
3.  $C(\tilde{A}) = 0$  si y sólo si  $\tilde{A}$  es un número triangular.
4.  $C$  es una función continua en  $[0, 1]^{\mathcal{TF}}$

*Demostración.* Las tres primeras propiedades son triviales, ya que  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$ . Veamos la cuarta:

Sea  $\{\tilde{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]^{\mathcal{TF}}$  una sucesión convergente:

$$\tilde{X}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{Y} \in [0, 1]^{\mathcal{TF}} \iff d_{\infty}(\tilde{X}_n, \tilde{Y}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por tanto,  $\sup_{\alpha \in [0, 1]} \left\{ d_H(\tilde{X}_{n\alpha}, \tilde{Y}_{\alpha}) \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  y, en particular para  $\alpha = 1$  se tiene  $d_H(\tilde{X}_{n1}, \tilde{Y}_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , y para  $\alpha = 0$ ,  $d_H(\tilde{X}_{n0}, \tilde{Y}_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Luego:

$$d_H(\tilde{X}_{n1}, \tilde{Y}_1) = \inf \left\{ r > 0 : \left[ \tilde{X}_{n1} \subseteq \bigcup_{x \in \tilde{Y}_1} B(x, r) \right] \wedge \left[ \tilde{Y}_1 \subseteq \bigcup_{x \in \tilde{X}_{n1}} B(x, r) \right] \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \tilde{X}_{n1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{Y}_1,$$

$$d_H(\tilde{X}_{n0}, \tilde{Y}_0) = \inf \left\{ r > 0 : \left[ \tilde{X}_{n0} \subseteq \bigcup_{x \in \tilde{Y}_0} B(x, r) \right] \wedge \left[ \tilde{Y}_0 \subseteq \bigcup_{x \in \tilde{X}_{n0}} B(x, r) \right] \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \tilde{X}_{n0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{Y}_0.$$

Para concluir, basta tener en cuenta que, por definición,  $C(\tilde{X}_n) = \frac{l(\tilde{X}_{n1})}{l(\tilde{X}_{n0})}$  y  $C(\tilde{Y}) = \frac{l(\tilde{Y}_1)}{l(\tilde{Y}_0)}$ , donde  $l$  denota la longitud del intervalo. Por tanto,  $C(\tilde{X}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C(\tilde{Y})$ .

Nótese que si  $l(\tilde{Y}_0) = 0$  entonces  $\max \{(d-a), (c-b)\} = 0$ , y  $C(\tilde{X}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

**Seguridad del Experto.** Por otro lado, también puede interesarnos la precisión con la que el experto ha expresado su juicio probabilístico. Por ejemplo, un experto que por medio de los métodos propuestos llega a un número como  $(0.2, 0.22, 0.23, 0.25)$  es mucho más preciso que un experto que asigna una probabilidad  $(0, 0, 1, 1)$ . De hecho, este último experto está expresando que no sabe nada sobre la probabilidad del evento que se está cuestionando, mientras que el primer experto transmite mucha seguridad. Podemos medir la seguridad del experto en su juicio probabilístico mediante el área bajo su función de pertenencia:

Dado un número borroso trapezoidal normalizado  $\tilde{A} = (a, b, c, d) \in [0, 1]^{\mathcal{F}}$  que denota el juicio probabilístico de un experto para un evento determinado. Llamaremos *seguridad* de  $\tilde{A}$  a

$$S(\tilde{A}) = 1 - \frac{d - a + c - b}{2}.$$

#### Propiedades de la seguridad expresada por el experto:

1.  $S(\tilde{A}) \in [0, 1] \forall \tilde{A} \in [0, 1]^{\mathcal{F}}$ .
2.  $S(\tilde{A}) = 1$  si y sólo si  $\tilde{A}$  es un número real.
3.  $S(\tilde{A}) = 0$  si y sólo si  $\tilde{A}$  es el intervalo  $[0, 1]$ .
4.  $S$  es una función continua en  $[0, 1]^{\mathcal{F}}$ .
5.  $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Rightarrow S(\tilde{A}) \geq S(\tilde{B})$  donde  $\subseteq$  es la relación de subsumción dada en la Sección 3.1.



### 3.4. EDUCIÓN DE PROBABILIDADES MEDIANTE NÚMEROS BORROSOS

*Demostración:* Las tres primeras propiedades son triviales.

La demostración de la cuarta propiedad es similar a la demostración de la continuidad de la coherencia, ya que, por definición,  $S(\tilde{A}) = 1 - \frac{d-a+c-b}{2} = 1 - \frac{l(\tilde{A}_1)+l(\tilde{A}_0)}{2}$ , siendo  $\tilde{A}_\alpha$  el  $\alpha$ -corte de  $\tilde{A}$  para  $\alpha = 0, 1$ .

Veamos la quinta propiedad:

Sean  $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)$  y  $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ . Si  $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$  entonces  $a_1 \leq a_2$ ,  $b_1 \leq b_2$ ,  $c_1 \geq c_2$  y  $d_1 \geq d_2$ , por tanto  $d_1 - a_1 \geq d_2 - a_2$  y  $c_1 - b_1 \geq c_2 - b_2$ . Luego,  $S(\tilde{A}) \geq S(\tilde{B})$ .

**Calidad del juicio probabilístico asignado por el experto.** Podemos medir la *calidad* del juicio probabilístico dado por el experto agregando las medidas anteriores de coherencia y seguridad del experto mediante la siguiente función:

$$\psi(\tilde{A}) = C(\tilde{A}) \times S(\tilde{A}).$$

#### Propiedades de calidad del juicio probabilístico dado por el experto:

La calidad del juicio probabilístico expresada por el experto verifica las siguientes propiedades:

1.  $\psi(\tilde{A}) \in [0, 1]$ .
2.  $\psi(\tilde{A}) = 1 \iff \tilde{A} = (a, a, a, a) \in \mathbb{R}$
3.  $\psi(\tilde{A}) = 0 \iff \tilde{A}$  es triangular, o  $\tilde{A} = (0, 0, 1, 1) = [0, 1]$ .
4.  $\psi$  es una función continua en  $[0, 1]^{\mathcal{TF}}$ .

*Demostración.*

1. Se sigue de manera trivial de las propiedades de las medidas de coherencia y seguridad dadas anteriormente.
2.  $\psi(\tilde{A}) = 1 \iff C(\tilde{A}) = 1$  y  $S(\tilde{A}) = 1 \iff d - a + c - b = 0$ ,  $\frac{c-b}{d-a} = 1 \iff d - a = b - c$  y  $c - b = d - a$  por tanto,  $b - c = c - b = d - a \iff b - c = d - a = 0 \iff a = b = c = d$ , ya que  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$ .
3.  $\psi(\tilde{A}) = 0 \iff C(\tilde{A}) = 0$  o  $S(\tilde{A}) = 0$ . Por un lado,  $C(\tilde{A}) = 0 \iff c - b = 0$  ( $\tilde{A}$  es triangular). Y, por otro lado,  $S(\tilde{A}) = 0 \iff d - a + c - b = 2 \iff d - a - 1 = 1 - c + b$  y, puesto que  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$ , se tiene que

$d - a - 1 \leq 0$  y  $1 - c + b \geq 0$ , luego  $d - a - 1 = 1 - c + b = 0$ , y por tanto,  $d - a = c - b = 1$ , luego  $\tilde{A} = (0, 0, 1, 1)$ .

4.  $\psi$  es una función continua por ser el producto de dos funciones continuas en un espacio métrico completo.

La utilidad de la función de calidad dada es obvia. En un proceso de elicitación interactivo, si el experto ha dado un número borroso con una calidad por debajo de un cierto umbral determinado previamente por el analista, teniendo en cuenta las condiciones del problema, se puede discutir el resultado con el experto e incluso, se podría optar por desechar la información de este experto y consultar a otros. De esta manera se puede filtrar la información suministrada por un conjunto de expertos en un proceso de elicitación colectivo como es el protocolo SRI ampliado a siete fases [42].

### 3.5. Conclusiones

Los números borrosos trapezoidales son una herramienta interesante para modelar el juicio probabilístico de los expertos en sistemas de ayuda a la decisión cuando la información que se maneja es imprecisa. Estos números extienden a los números reales, de modo que si se posee información precisa sobre algunos elementos del sistema, ésta se puede integrar en el sistema borroso. Además, se puede medir la calidad de la información aportada por medio de la borrosidad y la coherencia de ésta, lo que permite un proceso de filtrado de la información sobre la que se basará el sistema de ayuda a la decisión.

## UNA NUEVA FUNCIÓN DE SIMILITUD DE NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOIDALES GENERALIZADOS

Como hemos visto en el Capítulo 3, cuando se hace uso de la Lógica Borrosa para modelizar y tratar la información que aportan los expertos (modelado lingüístico borroso) se debe definir un modelo de representación y modelo computacional.

El mayor problema del modelo de representación consiste en la elección de escalas de términos lingüísticos adecuadas para todos los expertos. Sin embargo, el establecimiento de estas escalas puede llevar a sesgos derivados de la discretización de los valores entre los que debe decidir el experto y la cantidad de términos lingüísticos puede ser una cuestión controvertida. Este problema se puede resolver en el caso probabilístico mediante la metodología de educación de probabilidades vista en la Sección 3.3, pero esta metodología tiene en su contra, la cantidad de tiempo y recursos necesarios para desarrollar los diálogos analista-experto. Una asignación directa es mucho más rápida, pero puede llevar a cometer errores importantes.

Tanto si utilizamos una asignación directa como un método interactivo, la información aportada por los expertos son las entradas del modelo computacional. Las dificultades en el establecimiento de este modelo consisten en utilizar una aritmética de números borrosos adecuada (lo veremos con detalle en el capítulo 5) y en trasladar los resultados de los operadores de este modelo al modelo de representación. Recordemos (Sección 3.2) que los resultados de las operaciones aritméticas entre los números borrosos de una escala de términos lingüísticos, en general no es un elemento de esta escala, de modo que para poder informar de tales resultados, hemos de asignar convenientemente un término lingüístico de la escala al resultado. De hecho, asignaremos el término *más parecido*.

Para establecer la similitud entre los números borrosos implicados se puede recurrir a diferentes parámetros que dan una idea de la distancia entre ambos, de la forma o del tamaño. Estos parámetros se agregan en expresiones que definen el grado de similitud entre dos números borrosos.

Recordemos del Capítulo 3 que [6] un número borroso trapezoidal generalizado con soporte en el intervalo  $[0, 1]$  de la recta real es una tupla  $(a_1, a_2, a_3, a_4; w_{\tilde{A}})$  con  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 1$ ,  $w_{\tilde{A}} \in [0, 1]$  junto con una función de pertenencia trapezoidal con vértices  $(a_1, 0)$ ,  $(a_2, 1)$ ,  $(a_3, 1)$  y  $(a_4, 0)$ , y con altura  $w_{\tilde{A}}$ .

Los números borrosos trapezoidales generalizados sobre la recta real  $(\mathbb{R}^{\mathcal{F}G})$  han sido utilizados en numerosos problemas en ambiente borroso, como problemas de transporte borroso [49], problemas de flujo máximo y otros problemas de programación lineal [30].

Este capítulo repasa el estado del arte de las funciones de similitud de números borrosos trapezoidales generalizados, desde las primeras funciones utilizadas en la literatura hasta las funciones actuales. Veremos las propiedades deseables que debe tener una función de similitud de números borrosos trapezoidales así como las ventajas y los inconvenientes de las funciones de la literatura específica en este campo.

#### 4.1. Funciones de similitud de números borrosos trapezoidales

Una función de similitud de números borrosos trapezoidales generalizados con soporte en  $[0, 1]$  es una función  $S : [0, 1]^{\mathcal{F}G} \times [0, 1]^{\mathcal{F}G} \longrightarrow [0, 1]$  que indica el grado de semejanza entre dos números borrosos. Este valor debe coincidir con la percepción intuitiva que tenemos de los números que se están comparando. Cuanto más próximo esté este valor a 1, tanto más parecidos serán los números borrosos comparados.

Por ejemplo, una de las primeras medidas de similitud, utilizada por Chen [7] en 1996, determina el grado de similitud entre los números borrosos normalizados  $(a_1, a_2, a_3, a_4; 1)$  y  $(b_1, b_2, b_3, b_4; 1)$ , utilizando el concepto de distancia geométrica [7]

#### 4.1. FUNCIONES DE SIMILITUD DE NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOIDALES

---

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4}.$$

Esta medida tiene una serie de propiedades interesantes para asignar la similitud entre dos números trapezoidales normalizados:

- Propiedad 1:  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A})$
- Propiedad 2:  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 \iff \tilde{A} = \tilde{B}$
- Propiedad 3: Si  $\tilde{A} = (a, a, a, a; 1)$  y  $\tilde{B} = (b, b, b, b; 1)$  entonces

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - |a - b|.$$

Sin embargo, este valor no sirve para medir la similitud entre números borrosos generalizados.

El propio Chen [9] extendió su medida de similitud en 2003 al conjunto TF[0,1] añadiendo a la expresión anterior, la distancia entre los centros de gravedad de los números comparados. La medida de similitud entre los números  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_{\tilde{A}})$  y  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4; w_{\tilde{B}})$  estaría determinada por la expresión:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \right] \times [1 - X_{\tilde{A}} - X_{\tilde{B}}]^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \left[ \frac{\min \{Y_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{B}}\}}{\max \{Y_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{B}}\}} \right],$$

donde

$(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}})$  y  $(X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})$  son los centroides de  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ , respectivamente, Es decir:

$$X_{\tilde{A}} = \begin{cases} \frac{Y_{\tilde{A}}(a_3+a_2) + (w_{\tilde{A}} - Y_{\tilde{A}})(a_4+a_1)}{2w_{\tilde{A}}}, & \text{si } w_{\tilde{A}} \neq 0 \\ \frac{a_4+a_1}{2}, & \text{si } w_{\tilde{A}} = 0 \end{cases}$$

$$Y_{\tilde{A}} = \begin{cases} \frac{w_{\tilde{A}} \left( \frac{a_3-a_2}{a_4-a_1} + 2 \right)}{6}, & \text{si } a_4 - a_1 \neq 0 \\ \frac{w_{\tilde{A}}}{2}, & \text{si } a_4 - a_1 = 0 \end{cases}$$

Y

$$B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}}) = \begin{cases} 1, & \text{si } S_{\tilde{A}} + S_{\tilde{B}} > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$S_{\tilde{A}} = a_4 - a_1$$

$$S_{\tilde{B}} = b_4 - b_1$$

El factor  $[1 - X_{\tilde{A}} - X_{\tilde{B}}]^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})}$  se usa para distinguir los pares  $\tilde{A} = (a, a, a, a; w_{\tilde{A}})$  y  $\tilde{B} = (b, b, b, b; w_{\tilde{B}})$  del resto de pares de números borrosos generalizados.

Esta medida, además de extender la medida de 1996 a los números borrosos generalizados, aporta una cuarta propiedad:

- Propiedad 4: Si  $\tilde{A} = (a, a, a, a; 0)$  y  $\tilde{B} = (a, a, a, a; 1)$ , entonces  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$ .

En efecto, el primer número indica que “no es  $a \in \mathbb{R}$  nítidamente”, y el segundo indica “es  $a \in \mathbb{R}$  nítidamente”. Entonces, parece evidente que la similitud entre ambos es nula.

Sin embargo, esta medida tiene un pequeño defecto al asignar a los números  $\tilde{A} = (a, a, a, a; 0)$  y  $\tilde{B} = (a, a, a, a; 10^{-10})$  un grado de similitud  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$ . ¿Podemos asegurar que estos números son completamente distintos? ¿Tan distintos como los números de la propiedad 4? Obviamente no. Entonces necesitamos una medida que distinga estos números de una manera más justa.

Wei y Chen [11] propusieron una nueva medida en 2009 utilizando en esta ocasión el concepto de perímetro de los números borrosos trapezoidales generalizados:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \right] \times \left[ \frac{\min \{P(\tilde{A}), P(\tilde{B})\} + \min \{w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}\}}{\max \{P(\tilde{A}), P(\tilde{B})\} + \max \{w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}\}} \right],$$

donde  $P(\tilde{A}) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + w_{\tilde{A}}^2} + \sqrt{(a_3 - a_4)^2 + w_{\tilde{A}}^2} + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_1)$   
y de manera análoga para  $P(\tilde{B})$ .

Esta nueva medida verifica igualmente las cuatro propiedades de la medida de 2003 y aún contiene el defecto indicado anteriormente.

#### 4.1. FUNCIONES DE SIMILITUD DE NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOIDALES

Este hecho fue aprovechado por Xu et al. [65] en 2010 para proponer una nueva medida basada, como la de Chen de 2003, en el concepto de centro de gravedad.

En la medida de Xu et al. se consideran dos pesos  $w, 1 - w \in (0, 1)$  para dar mayor o menor importancia a los conceptos utilizados:

$$S_w(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - w \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} - (1 - w) \frac{\sqrt{(X_{\tilde{A}} - X_{\tilde{B}})^2 + (Y_{\tilde{A}} - Y_{\tilde{B}})^2}}{\sqrt{1.25}}.$$

Esta medida, en efecto, permite subsanar el error de las medidas de Wei y Chen, y además aporta una nueva propiedad:

- Propiedad 5:  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$  (y  $\tilde{A} < \tilde{B}$ )  $\iff \tilde{A} = (0, 0, 0, 0; 0)$  y  $\tilde{B} = (1, 1, 1, 1; 1)$ .

Sin embargo, Xu et al. sacrifican las propiedades 3 y 4 para conseguir esta quinta. Por ejemplo, si usamos  $w = 0,5$  en la medida de Xu, el grado de similitud de  $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1; 1)$  y de  $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1; 0)$  es de 0.7763, contra la cuarta propiedad. Y para  $(a, a, a, a; 1)$  y  $(b, b, b, b; 1)$  se tiene  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - 0.5 |a - b| - 0.5 \frac{|a-b|}{\sqrt{1.25}} \neq 1 - |a - b|$ , contra la tercera propiedad.

Otro error de la medida de Xu se observa por ejemplo, si consideramos los números trapezoidales borrosos dados (en la Figura 4.1.1) por  $\tilde{A} = (0, 0.1, 0.3, 0.4; 1)$ ,  $\tilde{B} = (0.25, 0.4, 0.6, 0.75; 1)$  y  $\tilde{C} = (0.75, 0.75, 0.825, 0.85; 1)$ . El grado de similitud con  $w = 0.5$  de  $\tilde{C}$  y  $\tilde{A}$  con respecto a  $\tilde{B}$  es 0.715629 en ambos casos, y por tanto, los números de los extremos son igual de parecidos al número central. Sin embargo parece claro que tanto por la forma, como por el tamaño, y lo que puede ser más importante: por compartir área,  $\tilde{B}$  debe ser más parecido a  $\tilde{A}$  que a  $\tilde{C}$ .

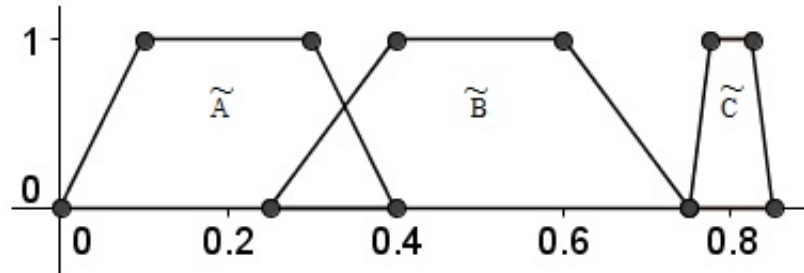


FIGURA 4.1.1. Un fallo en la función de similitud de Xu et al.

Además de las medidas de Wei y Chen, y de Xu, numerosos autores han definido el grado de similitud entre dos números borrosos trapezoidales, tratando de mantener la mayor cantidad posible de entre las cinco propiedades dadas. Por su actualidad destacaremos las siguientes medidas:

- Función de Sridevi y Nadarajan de 2009 [52] (que sacrifica la tercera y la quinta propiedad). La función de Sridevi y Nadarajan está basada en la diferencia borrosa de distancia entre dos números borrosos [52]:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 \mu_d(x)}{4} \right] \times [1 - X_{\tilde{A}} - X_{\tilde{B}}]^{B(S_{\tilde{A}}, S_{\tilde{B}})} \times \left[ \frac{\min \{Y_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{B}}\}}{\max \{Y_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{B}}\}} \right],$$

con  $\mu_d(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{d}, & \text{si } 0 \leq x \leq d \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ ,  $d \in (0, 1]$ ,  $x = |a_i - b_i|$  y  $(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}})$  y  $(X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})$  son los centroides de los números comparados.

La elección del parámetro  $d$  representa el grado de precisión requerido para medir la similitud entre números borrosos [52].

- Función de Gomathi y Sivaraman de 2012 [21] (que únicamente sacrifica la quinta propiedad pero que mantiene el defecto de las medidas de Chen de 2003 y de 2009 indicadas anteriormente). Concretamente, la medida de Gomathi y Sivaraman modifica la de Wei y Chen utilizando la media geométrica de la diferencia de los vértices de los números comparados, en lugar de la media aritmética. Otra modificación con respecto a la medida de Wei y Chen es que en lugar de utilizar el perímetro del número trapezoidal usan una función más sencilla de los vértices y la altura de los números trapezoidales borrosos generalizados. Su intención es reducir el tiempo computacional de la medida de Wei and Chen, obteniendo valores similares[11]:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[ \sqrt[4]{\prod_{i=1}^4 (1 - |a_i - b_i|)} \right] \times \left[ \frac{\min \{Q(\tilde{A}), Q(\tilde{B})\} + \min \{w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}\}}{\max \{Q(\tilde{A}), Q(\tilde{B})\} + \max \{w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}\}} \right],$$



#### 4.1. FUNCIONES DE SIMILITUD DE NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOIDALES

---

donde

$$Q(\tilde{A}) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^2 + (a_4 - a_3)^2 + w_A^2},$$

y análogamente para  $Q(\tilde{B})$

- Función de Hejazi et al. de 2011:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \right] \times \left[ \frac{\min \{P(\tilde{A}), P(\tilde{B})\}}{\max \{P(\tilde{A}), P(\tilde{B})\}} \right] \times \left[ \frac{\min A \{(\tilde{A}), A(\tilde{B})\} + \min \{w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}\}}{\max \{A(\tilde{A}), A(\tilde{B})\} + \max \{w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}\}} \right]$$

donde  $P(\tilde{A}) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + w_A^2} + \sqrt{(a_3 - a_4)^2 + w_A^2} + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_1)$  es el perímetro de  $\tilde{A}$ , y análogamente con  $P(\tilde{B})$ , y  $A(\tilde{A}) = \frac{[(a_3 - a_2) + (a_4 - a_1)]w_{\tilde{A}}}{2}$  es el área de  $\tilde{A}$  y análogamente con  $A(\tilde{B})$ .

- Función de Zhu y Xu de 2012:

$$\text{Si } \max \{P(\tilde{A}), P(\tilde{B})\} \neq 0$$

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \right] \times \left[ 1 - \sqrt{(X_{\tilde{A}} - X_{\tilde{B}})^2 + (Y_{\tilde{A}} - Y_{\tilde{B}})^2} \right]} \times \left[ \frac{\min \{P(\tilde{A}), P(\tilde{B})\}}{\max \{P(\tilde{A}), P(\tilde{B})\}} \right] \times e^{\left[ \frac{\min \{A(\tilde{A}), A(\tilde{B})\}}{\max \{A(\tilde{A}), A(\tilde{B})\}} \right]}$$

$$\text{Si } \max \{P(\tilde{A}), P(\tilde{B})\} = 0$$

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|}{4} \right] \times \left[ 1 - \sqrt{(X_{\tilde{A}} - X_{\tilde{B}})^2 + (Y_{\tilde{A}} - Y_{\tilde{B}})^2} \right]}$$

Esta función tiene un grave problema de definición, ya que no es capaz de medir la similitud entre pares de números borrosos cuyos centroides estén a una distancia superior a 1. Por ejemplo la similitud de los números

$(0.01, 0.01, 0.01, 0.01; 0.5)$  y  $(1, 1, 1, 1; 1)$  no está definida con la expresión de Zhu y Xu, ya que resulta  $\sqrt{1 - 0.99}\sqrt{1 - \sqrt{0.99^2 + 0.25^2}} = \sqrt{0.01}\sqrt{-0.021}$ . Este error se podría subsanar dividiendo como hace Xu [65] en 2010 por  $\sqrt{1.25}$  que es la máxima distancia entre los centroides de los números trapezoidales generalizados con soporte en  $[0,1]$ , pero en tal caso, al igual que le ocurre a la función de Xu et al. sacrificaríamos las propiedades 3 y 4.

#### 4.2. Una nueva función de similitud de números borrosos trapezoidales

Los parámetros más habituales en las funciones citadas son la distancia geométrica, la distancia entre los centros de gravedad, el perímetro, y el área de los números trapezoidales comparados. En la función que nosotros proponemos, consideramos además, clave el área compartida por los números borrosos generalizados en relación al área total de dichos números, ya que cuanto más próximo sea este valor a 1, más parecido serán los números borrosos que se están comparando.

Además, a efectos prácticos, el área compartida es un parámetro importante, ya que las operaciones realizadas en el marco de una aritmética y una escala de números borrosos trapezoidales adecuadas darán resultados en el universo de discurso de las variables lingüísticas que se estén considerando. Dicho universo estará cubierto por números borroso trapezoidales, y el número resultante caerá sobre varios de ellos.

Un ejemplo se puede ver en la Figura 4.2.1. Tras una serie de operaciones en la escala dada, se obtiene el número borroso representado por la figura rayada. Se observa que el área común, además de los parámetros ya señalados, puede ser un factor importante.

También utilizamos directamente la diferencia entre las altura de los números borrosos generalizados, ya que, aunque este parámetro esté en cierto modo presente al considerar la distancia entre los centroides, se han observado fallos al medir la similitud entre algunos pares de números con altura cercana a cero (Sección 4.1).

Definimos el grado de similitud entre los números borrosos trapezoidales generalizados  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_{\tilde{A}})$  y  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4; w_{\tilde{B}})$  como:

## 4.2. UNA NUEVA FUNCIÓN DE SIMILITUD DE NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOIDALES

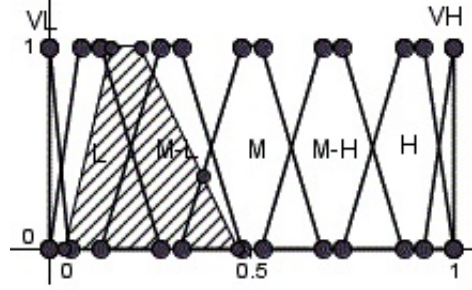


FIGURA 4.2.1. Resultado de varias operaciones en una escala borrosa.

- Si  $\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx \neq 0$

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = (1 - |w_{\tilde{A}} - w_{\tilde{B}}|) \left[ 1 - (1 - \alpha - \beta) \left( 1 - \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} \right) - \alpha \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} - \beta \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} \right]$$

- Si  $\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx = 0$

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = (1 - |w_{\tilde{A}} - w_{\tilde{B}}|) \left[ 1 - \left( \frac{1 - \alpha - \beta}{2} + \alpha \right) \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} - \left( \frac{1 - \alpha - \beta}{2} + \beta \right) \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} \right]$$

donde

$$\alpha + \beta < 1$$

$\mu_{\tilde{\chi}}$  es la función de pertenencia de  $\tilde{\chi}$ .

$$M = \max_{[0,1] \times [0, \frac{1}{2}]} \{d((x, y), (x', y'))\}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min_{0 \leq x \leq 1} (\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max_{0 \leq x \leq 1} (\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$$

$(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})$  se calculan como en (1) y (2)

**Proposición 1.**  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0, 1]$ .

*Demostración.* Puesto que los pesos suman 1, basta ver que

$$(1 - |w_{\tilde{A}} - w_{\tilde{B}}|) \leq 1, \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} \leq 1, \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} \leq 1, \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} \leq 1,$$

lo cual es trivial.

**Proposición 2.**  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = S(\tilde{B}, \tilde{A})$ .

*Demostración.* Trivial.

**Proposición 3.**  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1$  si y sólo si  $\tilde{A} = \tilde{B}$ .

*Demostración.* La implicación inversa es evidente. Veamos la implicación directa.

Si  $\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx \neq 0$

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = (1 - |w_{\tilde{A}} - w_{\tilde{B}}|) \left\{ 1 - (1 - \alpha - \beta) \left( 1 - \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} \right) - \alpha \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} - \beta \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} \right\} = 1$$

y puesto que ambos factores son menores o iguales que 1, debe ser:

$$1 - (1 - \alpha - \beta) \left( 1 - \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} \right) - \alpha \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} - \beta \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} = 1$$

$$(1 - \alpha - \beta) \left( 1 - \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} \right) + \alpha \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} + \beta \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} = 0,$$

Y como los tres sumandos son positivos o nulos, deben ser:

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} &= 1, \\ \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} &= 0, \\ \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} &= 0, \end{aligned}$$

Por tanto  $\tilde{A} = \tilde{B}$ .

Si  $\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx = 0$  entonces de manera análoga se prueba que

$$\begin{aligned} \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} &= 0 \\ \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto  $\tilde{A} = \tilde{B}$ .

**Proposición 4.** Si  $M = 1$  y  $\tilde{A} = (a, a, a, a; 1)$  y  $\tilde{B} = (b, b, b, b; 1)$ , entonces  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - |a - b|$ .

## 4.2. UNA NUEVA FUNCIÓN DE SIMILITUD DE NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOIDALES

---

*Demostración.* En estas hipótesis

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \left( \frac{1 - \alpha - \beta}{2} + \alpha \right) \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} - \left( \frac{1 - \alpha - \beta}{2} + \beta \right) d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})] = 1 - |a - b|$$

Veremos más adelante que la utilización de distancias con  $M=1$  tiene otras ventajas adicionales.

**Proposición 5.** Si  $\tilde{A} = (a, a, a, a; 0)$  y  $\tilde{B} = (a, a, a, a; 1)$ , entonces  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$ .

*Demostración.* Obvio.

**Proposición 6.** Si  $S(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$  y  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  entonces  $|w_{\tilde{A}} - w_{\tilde{B}}| = 1$  o bien  $\tilde{A} = (0, 0, 0, 0; w_{\tilde{A}})$  y  $\tilde{B} = (1, 1, 1, 1; w_{\tilde{B}})$  con  $w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}} \in [0, 1]$ .

*Demostración.* Supongamos que  $|w_{\tilde{A}} - w_{\tilde{B}}| \neq 1$  entonces:

Si  $\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx \neq 0$

$$\begin{aligned} S(\tilde{A}, \tilde{B}) &= (1 - |w_{\tilde{A}} - w_{\tilde{B}}|) \left\{ 1 - (1 - \alpha - \beta) \left( 1 - \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} - \beta \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} \right\} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 - (1 - \alpha - \beta) \left( 1 - \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} \right) - \alpha \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} - \\ &\quad - \beta \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - \alpha - \beta) \left( 1 - \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} \right) + \alpha \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} + \\ &\quad + \beta \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - \alpha - \beta) \left( 1 - \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} \right) + \alpha \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} + \\ &\quad + \beta \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} = (1 - \alpha - \beta) + \alpha + \beta \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - \alpha - \beta) \left( 1 - \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} - 1 \right) + \alpha \left( \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} - 1 \right) + \end{aligned}$$

$$+\beta \left( \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} - 1 \right) = 0$$

Y como son sumandos de  $[0,1]$  se tiene que cada uno de ellos debe ser cero, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx} = 0 \\ \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} = 1 \\ \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} = 1 \end{array} \right.$$

De la segunda expresión se sigue que  $|a_i - b_i| = 1 \forall i$ , y como  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  se tiene que  $b_i = a_i + 1 \forall i$ , y puesto que  $a_i, b_i \in [0, 1]$  se tiene que

$$a_i = 0, b_i = 1 \forall i.$$

Si  $\int_0^1 \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) dx = 0$ , entonces

$$1 - \left( \frac{1 - \alpha - \beta}{2} + \alpha \right) \frac{\sum |a_i - b_i|}{4} - \left( \frac{1 - \alpha - \beta}{2} + \beta \right) \frac{d[(X_{\tilde{A}}, Y_{\tilde{A}}), (X_{\tilde{B}}, Y_{\tilde{B}})]}{M} = 0$$

y de manera análoga se sigue la misma tesis.

### Observaciones:

1. Para  $\alpha + \beta = 1$  y  $d$  la distancia euclídea de  $\mathbb{R}^2$  se tiene la medida de Xu en los números borrosos trapezoidales tales que  $|w_{\tilde{A}} - w_{\tilde{B}}| = 0$ .
2. La medida penaliza con un peso de  $(1 - \alpha - \beta)$  el hecho de que dos conjuntos sean disjuntos.
3. Tal y como se prueba en las proposiciones 2-5, la medida propuesta verifica las primeras cuatro propiedades siempre que tomemos una distancia  $d$  cuya  $M = \max_{[0,1] \times [0, \frac{1}{2}]} \{d((x, y), (x', y'))\} = 1$ , como, por ejemplo, la distancia  $l_{\infty}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ . En este caso, la quinta propiedad sólo se verifica parcialmente, ya que además de los números  $\tilde{A} = (0, 0, 0, 0; 0)$  y  $\tilde{B} = (1, 1, 1, 1; 1)$  existen otros pares de números cuya similitud es nula.

## 4.2. UNA NUEVA FUNCIÓN DE SIMILITUD DE NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOIDALES

---

4. Respecto al defecto que presentan las medidas de Chen señaladas anteriormente, la propuesta tiene la siguiente propiedad

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S((a, a, a, a; 0), (a, a, a, a; \varepsilon)) = 1 \text{ y}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} S((a, a, a, a; 0), (a, a, a, a; \varepsilon)) = 0,$$

que subsana dichos errores.

Por ejemplo, la similitud de los números  $\tilde{A} = (a, a, a, a; 0)$  y  $\tilde{B} = (a, a, a, a; 10^{-10^{10}})$  es:

$$S(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left(1 - 10^{-10^{10}}\right) \left(1 - \left(\frac{1 - \alpha - \beta}{2} + \beta\right) \frac{10^{-10^{10}}}{2M}\right) =$$

$$\left(1 - 10^{-10^{10}}\right) \left(1 - \left(\frac{1 - \alpha - \beta}{2} + \beta\right) \frac{10^{-10^{10}}}{2M}\right) \approx 1,$$

que parece más razonable que el valor nulo que asignaban las medidas de Chen.

5. El conjunto  $[0, 1]^{\mathcal{TF}}$  de los números trapezoidales borrosos normalizados con soporte en  $[0, 1]$  es un subconjunto de  $[0, 1]^{\mathcal{TFG}}$  especialmente interesante en multitud de ámbitos de la Teoría de la Decisión, ya que, como hemos visto en los capítulos precedentes, los expertos darán a menudo escalas de términos lingüísticos representados por números de  $[0, 1]^{\mathcal{TF}}$ . Sin embargo, se requieren ciertas consideraciones respecto a la distancia  $d$  utilizada en la medida de similitud. Veamos:

Supongamos que las esferas determinadas por la distancia  $d$  no son rectangulares<sup>1</sup>. Si nos restringimos a  $[0, 1]^{\mathcal{TF}}$ , una buena medida de similitud debería identificar a  $(0, 0, 0, 0)$  y a  $(1, 1, 1, 1)$  como los elementos más diferentes entre sí. Sin embargo, existe  $\tilde{A} \in [0, 1]^{\mathcal{TF}}$  tal que  $S((0, 0, 0, 0), \tilde{A}) < S((0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1))$

---

<sup>1</sup>Las esferas determinadas por una distancia son los conjuntos de puntos que equidistan de un punto dado. La esfera de centro  $a$  y radio  $r$  con la distancia  $d$  es  $A(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) = r\}$

Por ejemplo, si tomamos la medida de Xu et al.  $S_w$  con  $w = 0,5$ , se tiene  $S_{0.5}((0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)) = 0.052$ .

Como las esferas de la distancia euclídea en  $\mathbb{R}^2$  son circunferencias, si trazamos (Figura 4.2.2) la circunferencia centrada en el centroide de  $(0,0,0,0)$ , es decir en  $(0,0.5)$ , y de radio la distancia al centroide de  $(1,1,1,1)$ , es decir a  $(1,0.5)$ , obtenemos una región más allá de dicha circunferencia en la que es posible encontrar el centroide de otro número de  $[0, 1]^{\mathcal{F}}$ . Este número distará más de  $(0,0,0,0)$  que el propio  $(1,1,1,1)$ .

Más concretamente, sabemos [9] que el centroide de cualquier número de  $[0, 1]^{\mathcal{F}}$  se encuentra en la banda  $[0,1] \times [1/3, 1/2]$ . La circunferencia dada corta a la recta  $y = \frac{1}{3}$  en  $x = \sqrt{\frac{35}{36}}$ . Entonces cualquier número  $(a, 1, 1, 1)$  con  $a > \sqrt{\frac{35}{36}}$  es más diferente de  $(0,0,0,0)$  que el propio  $(1,1,1,1)$ . Por ejemplo,  $S_{0.5}((0.99, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 0)) = 0.049 < 0.052 = S_{0.5}((0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1))$ .

Sin embargo, si las esferas determinadas por la distancia dada son rectangulares, este hecho se puede solventar. Por ejemplo, con la distancia  $l_\infty$ , cuyas

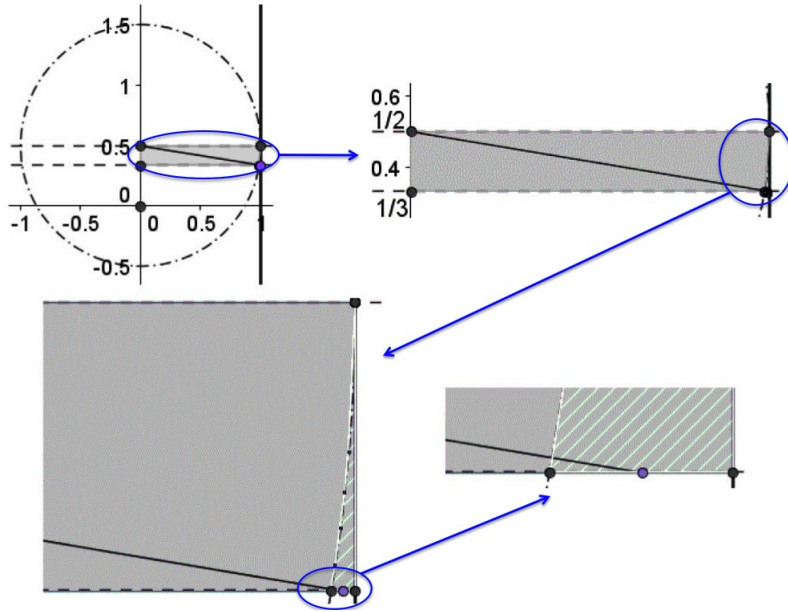


FIGURA 4.2.2. Inconveniente de utilizar distancias con esferas circulares



### 4.3. ESTUDIO COMPARATIVO

---

esferas son cuadradas, sí podemos garantizar que los elementos que más difieren de  $[0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$  son  $(0,0,0,0)$  y  $(1,1,1,1)$ .

Otra distancia apropiada es  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|$  cuyas esferas son bandas verticales.

Puesto que los centroides se encuentran en la banda  $[0,1] \times [1/3, 1/2]$ , el rango de variación de la abscisa es mucho mayor que el rango de variación de la ordenada. Con las distancias señaladas indicamos, en la mayoría de los casos, una mayor importancia de la posición sobre la horizontal de los números borrosos trapezoidales, que unido al área compartida son los parámetros fundamentales a tener en cuenta a la hora de identificar un término lingüístico de una escala borrosa dada.

### 4.3. Estudio comparativo

Como hemos visto en las secciones anteriores, la mayoría de las funciones de similitud no sólo no verifican las cinco propiedades señaladas, sino que tienen otros inconvenientes para asignar la similitud de ciertos pares de números borrosos trapezoidales generalizados. Estos inconvenientes son consecuencia de que los parámetros utilizados no son los más apropiados en todas las situaciones. Por este motivo es conveniente realizar un estudio comparativo en el que se pongan de manifiesto tanto las ventajas como los inconvenientes de las distintas funciones de similitud. A lo largo de la Historia se han utilizado diversos conjuntos de pares de números borrosos trapezoidales. El primero de ellos corresponde a Chen and Chen [9], que proponen 18 pares de números. Este conjunto ha sido utilizado por otros autores para comparar sus funciones de similitud propuestas [11, 13, 74]. Sridevi y Nadarajam [52] utilizan un conjunto compuesto por 26 pares, y más recientemente Xu et al. [65] han propuesto un conjunto de 30 pares (Figura 4.3.2.). Finalmente, autores como Gomathi y Sivaraman [21] y Ye [66] únicamente utilizan 6 pares de números trapezoidales para comparar sus respectivas funciones de similitud.

Por ser el más completo, en este trabajo utilizaremos el conjunto de Xu et al. como punto de partida para comparar las distintas funciones de similitud descritas. Sin embargo este autor evita utilizar conjuntos en que su función de similitud falla (al igual que el resto de autores consultados [61]), motivo por el cual ampliaremos dicho conjunto con otros cinco pares. El conjunto final sobre el que valoraremos las distintas funciones de similitud puede verse en la Tabla 4.3.1 Además en esta tabla, y en su continuación (Tabla 4.3.2) puede verse el valor de similitud asignado por algunas de las funciones más recientes. La primera propiedad se puede observar en todos los casos estudiados invirtiendo el orden de números comparados. Todas las funciones consideradas verifican esta propiedad.

Los casos 7, 16 y 28 pueden ser usados para verificar la segunda propiedad, sin embargo, en el caso 28 se pone de manifiesto la dificultad de algunas funciones, como las de Wei y Chen, Hejazi et al., y Gomathi y Sivaraman, para asignar la similitud, mostrando un inconveniente adicional de estas medidas.

La tercera propiedad puede analizarse en el caso 32, que ha sido añadido al conjunto de los 30 pares de Xu, ya que dicho conjunto carece de pares como éste. Precisamente observamos que la función de Xu es la única que no verifica dicha propiedad.

Para evaluar la verificación de la cuarta propiedad hemos añadido el par 33 al conjunto de Xu. En este caso, como se ha justificado en las secciones anteriores, la similitud debe ser nula, y fallan las funciones de Xu y de Zhu y Xu.

Finalmente, para evaluar la propiedad 5 se utiliza el caso 30. Todas las funciones de similitud verifican esta propiedad parcialmente, y únicamente la función de Xu et al. verifica la doble implicación.

El caso 29 ilustra el inconveniente señalado en las secciones anteriores por la mayoría de las funciones: Números muy parecidos con altura muy baja, o nula, son considerados completamente diferentes. La función propuesta, así como la de Xue et al. y la de Zhu y Xu evitan este inconveniente.

### 4.3. ESTUDIO COMPARATIVO

---

Los casos 34 y 35 se han añadido al conjunto de pares de Xu et al.. para valorar el inconveniente mostrado por la función de Xu et al.. en la Figura 4.2.1. Observamos así que también la función de similitud de Chen y Chen verifica este inconveniente.

Todas las funciones estudiadas se comparan gráficamente con la función propuesta en la Figura 4.3.1. Los valores dados por la función propuesta se representan en el eje de abscisas, mientras que la función comparada se representa en el eje de ordenadas. Cuanto más cercanos estén los puntos a la bisectriz del primer cuadrante, más parecidas son las funciones comparadas, y las mayores discrepancias se obtienen en los puntos más alejados.

La mayoría de los puntos están en la franja limitada por las rectas  $y = x$  y  $y = x - \frac{1}{3}$ . Esto se explica porque la función propuesta penaliza con un peso  $1 - \alpha - \beta = \frac{1}{3}$  cuando los números comparados no comparten área. Además, vemos que la función más diferente a la propuesta es la función de Xu et al., y las mayores diferencias se observan cuando los números comparados se diferencian mucho en sus alturas. Tales son los casos 14, 19 y 24, en los cuales la función propuesta coincide aproximadamente con el resto de funciones salvo con la de Xu et al..

Observamos una gran discrepancia en el caso 29 con las funciones de Chen y Chen, Wei y Chen, Hejazi et al.. y Gomathi y Sivaraman. Esta discrepancia es consecuencia del inconveniente asociado con estas funciones, descrito en las secciones anteriores, que consiste en considerar los números  $(a, a, a, a; 0)$  y  $(a, a, a, a; \epsilon)$  completamente diferentes cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Lo mismo le ocurre a la función de Chen y Chen y Hejazi et al.. cuando los números implicado son  $(a, b, c, d; 0)$  y  $(a, b, c, d; \epsilon)$  (casos 15 y 20).

En el caso 25, formado por los números  $(0.1, 0.2, 0.3, 0.4; 0)$  y  $(0.3, 0.3, 0.3, 0.3; 0)$ , se observan diferencias con respecto a las funciones de Wei and Chen y de Gomathi y Sivaraman. Ambos son números con altura y área nula, y con centro de gravedad muy próximos  $((0.25, 0)$  y  $(0.3, 0))$ . Si ahora consideramos el perímetro  $(0.3$  y  $0$  respectivamente), y la distancia geométrica, entonces el grado de similitud se reduce ligeramente, pero no debe llegar a anularse.

Finalmente, en el caso 27 observamos discrepancias con la función de Hejazi et al.. Esta función muestra aquí otro inconveniente, ya que utiliza los términos  $\frac{\min\{P(\tilde{A}), P(\tilde{B})\}}{\max\{P(\tilde{A}), P(\tilde{B})\}}$  y  $\frac{\min\{w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}\}}{\max\{w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{B}}\}}$  que son redundantes (de valor 0.5) en el caso considerado.

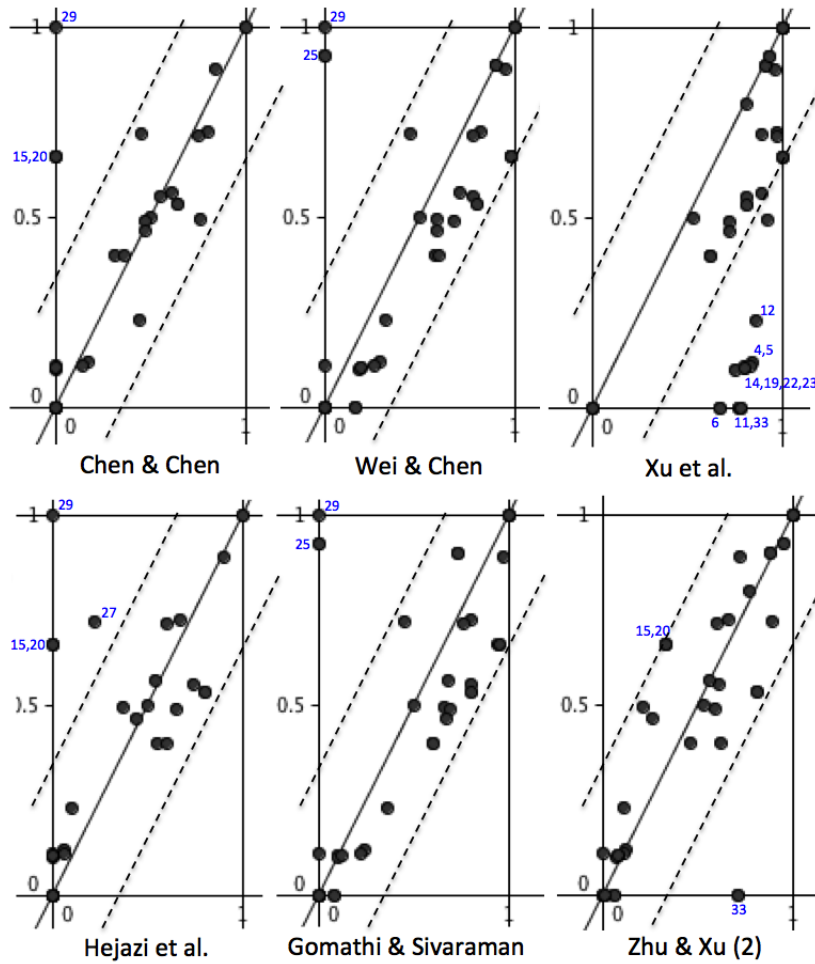


FIGURA 4.3.1. Conjunto de pares de números trapezoidales borrosos utilizados por Xu et al. (2010).

### 4.3. ESTUDIO COMPARATIVO

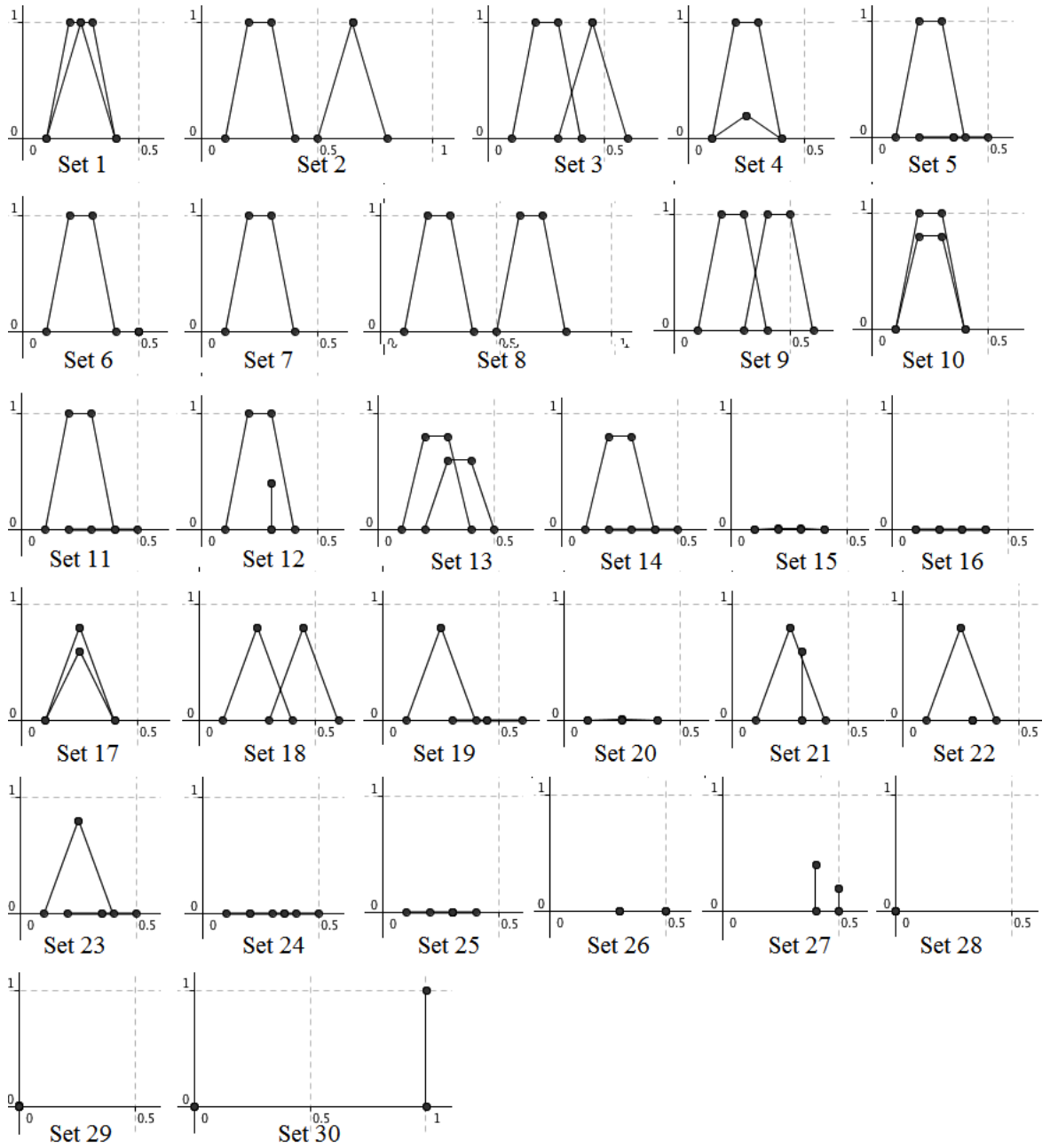


FIGURA 4.3.2. Conjunto de pares de números trapezoidales borrosos utilizados por Xu et al. (2010).

Par	Número 1	Número 2	Wei y Chen (2009)
1	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,1, 0,25, 0,25, 0,4; 1,0)	0.95
2	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,5, 0,65, 0,65, 0,8; 1,0)	0.58
3	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,3, 0,45, 0,45, 0,6; 1,0)	0.78
4	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,1, 0,25, 0,25, 0,4; 0,2)	0.29
5	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,2, 0,35, 0,35, 0,5; 0,2)	0.26
6	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,5, 0,5, 0,5, 0,5; 0,0)	0
7	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	1
8	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,5, 0,6, 0,7, 0,8; 1,0)	0.6
9	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,3, 0,4, 0,5, 0,6; 1,0)	0.8
10	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 0,8)	0.82
11	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,2, 0,3, 0,4, 0,5; 0,0)	0.16
12	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,3, 0,3, 0,3, 0,3; 0,4)	0.32
13	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 0,8)	(0,2, 0,3, 0,4, 0,5; 0,6)	0.71
14	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 0,8)	(0,2, 0,3, 0,4, 0,5; 0,0)	0.19
15	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 0,01)	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 0,0)	0.98
16	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 0,0)	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 0,0)	1
17	(0,1, 0,25, 0,25, 0,4; 0,8)	(0,1, 0,25, 0,25, 0,4; 0,6)	0.78
18	(0,1, 0,25, 0,25, 0,4; 0,8)	(0,3, 0,45, 0,45, 0,6; 0,8)	0.8
19	(0,1, 0,25, 0,25, 0,4; 0,8)	(0,3, 0,45, 0,45, 0,6; 0,0)	0.18
20	(0,1, 0,25, 0,25, 0,4; 0,01)	(0,1, 0,25, 0,25, 0,4; 0,0)	0.98
21	(0,1, 0,25, 0,25, 0,4; 0,8)	(0,3, 0,3, 0,3, 0,3; 0,6)	0.59
22	(0,1, 0,25, 0,25, 0,4; 0,8)	(0,3, 0,3, 0,3, 0,3; 0,0)	0
23	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 0,8)	(0,2, 0,35, 0,35, 0,5; 0,0)	0.19
24	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 0,0)	(0,2, 0,35, 0,35, 0,5; 0,0)	0.9
25	(0,1, 0,2, 0,3, 0,4; 0,0)	(0,3, 0,3, 0,3, 0,3; 0,0)	0
26	(0,3, 0,3, 0,3, 0,3; 0,0)	(0,5, 0,5, 0,5, 0,5; 0,0)	*
27	(0,4, 0,4, 0,4, 0,4; 0,4)	(0,5, 0,5, 0,5, 0,5; 0,2)	0.45
28	(0,0, 0,0, 0,0, 0,0; 0,0)	(0,0, 0,0, 0,0, 0,0; 0,0)	*
29	(0,0, 0,0, 0,0, 0,0; 0,0)	(0,0, 0,0, 0,0, 0,0; 1,0E-4)	0
30	(0,0, 0,0, 0,0, 0,0; 0,0)	(1,0, 1,0, 1,0, 1,0; 1,0)	0
31	(0,01, 0,01, 0,01, 0,01; 0,0)	(1,0, 1,0, 1,0, 1,0; 1,0)	0
32	(0,25, 0,25, 0,25, 0,25; 1,0)	(0,75, 0,75, 0,75, 0,75; 1,0)	0.5
33	(0,5, 0,5, 0,5, 0,5; 0,0)	(0,5, 0,5, 0,5, 0,5; 1,0)	0
34	(0,0, 0,1, 0,3, 0,4; 1,0)	(0,25, 0,4, 0,6, 0,75; 1,0)	0.68
35	(0,75, 0,775, 0,825, 0,85; 1,0)	(0,25, 0,4, 0,6, 0,75; 1,0)	0.59

TABLA 4.3.1. Similitud de 35 pares de números trapezoidales con las funciones actuales.

### 4.3. ESTUDIO COMPARATIVO

Par	Xu (2010)	Hejazi (2011)	Gomathi (2012)	Zhu-Xu (2012)	Propuesta (2013)
1	0.96	0.9	0.97	0.72	0.89
2	0.62	0.55	0.6	0.45	0.4
3	0.81	0.74	0.8	0.6	0.55
4	0.84	0.06	0.24	0.12	0.12
5	0.8	0.06	0.22	0.11	0.11
6	0.67	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1
8	0.62	0.6	0.6	0.6	0.4
9	0.81	0.8	0.8	0.8	0.53
10	0.97	0.67	0.8	0.66	0.73
11	0.77	0	0.08	0.06	0
12	0.86	0.1	0.36	0.1	0.23
13	0.89	0.54	0.68	0.55	0.56
14	0.8	0	0.1	0.08	0.11
15	1	0	0.94	0.33	0.66
16	1	*	1	1	1
17	0.97	0.6	0.76	0.6	0.72
18	0.81	0.8	0.8	0.8	0.53
19	0.75	0	0.1	0.07	0.1
20	1	0	0.95	0.33	0.66
21	0.92	0.37	0.66	0.21	0.49
22	0.83	0	0	0	0.11
23	0.8	0	0.12	0.08	0.11
24	0.91	*	0.73	0.87	0.9
25	0.93	*	0	0.95	0.92
26	0.81	*	*	0.75	0.8
27	0.89	0.22	0.45	0.88	0.72
28	1	*	*	1	1
29	1	0	0	1	1
30	0	0	0	0	0
31	0	0	0	*	0
32	0.53	0.5	0.5	0.5	0.5
33	0.78	0	0	0.66	0
34	0.72	0.65	0.69	0.58	0.49
35	0.72	0.44	0.67	0.25	0.47

TABLA 4.3.2. Similitud de 35 pares de números trapezoidales con las funciones actuales (CONTINUACIÓN).

#### 4.4. Conclusiones

En este capítulo se ha construido una nueva medida de similitud para números difusos trapezoidales generalizados basada en la diferencia de alturas y en el área compartida entre los números implicados en relación con el área total de ambos, además de la distancia entre los centroides y la distancia geométrica que ya habían sido considerados por otros autores. El resultado es una medida de similitud con una gran cantidad de buenas propiedades, que difiere sustancialmente con el resto de medidas en pares de números difusos en las que éstas no ajustan bien, y mide conjuntos que otras no pueden. La medida además permite elegir pesos para los parámetros implicados del modo que mejor se adapte a las necesidades del modelo.



## ANÁLISIS DE RIESGOS EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN. UN ENFOQUE BORROSO

En los Sistemas de Información (SI), los activos están interrelacionados, de modo que un fallo en uno de ellos se puede propagar por toda la red hasta llegar a afectar a los activos más valiosos del sistema, que suelen ser datos y servicios de las organizaciones. De hecho, el interés que tiene la mayoría de los activos del SI para la Organización es el de garantizar el correcto funcionamiento de los servicios que ofrece, o la disponibilidad y confidencialidad de los datos que maneja. Así, el valor de dichos activos se hereda de estos últimos.

Cuando una amenaza se cierne sobre alguno de los activos del SI, el riesgo se puede medir como función del valor del activo, de la probabilidad de materialización de la amenaza y de la degradación que ésta pueda causar sobre el valor del activo. Sin embargo, los expertos encargados de asignar tales valores a menudo aportan únicamente información vaga e incierta, de modo que las técnicas borrosas pueden ser muy útiles en este ámbito. En este capítulo proponemos un tratamiento borroso para los modelos de análisis y gestión de riesgos promovidos por las metodologías internacionales, mediante el establecimiento de un modelo de representación y un modelo computacional adecuados.

### 5.1. Análisis y gestión de riesgos basado en la metodología MAGERIT

Existen varias metodologías de análisis y gestión de riesgos en los SI que toman como base los estándares de la Organización Internacional de Normalización (ISO), concretamente las normas de la serie ISO 27000. Algunos ejemplos de estas metodologías son MAGERIT del Ministerio de Administraciones Públicas del Gobierno de España [35, 36, 37], OCTAVE [3, 4], desarrollada por la Universidad de Carnegie Mellon de Pensilvania (EEUU), MEHARI [40] del Club de la Sécurité de

l'Information Francais, CRAMM [12] de la Agencia Estatal de Cómputo y Telecomunicaciones de Reino Unido, o la NIST SP 800-30 [44] del National Institute of Standard and Tenology (EEUU).

Las normas ISO/IEC 27000 [26, 27, 28, 25] definen los *activos* de un SI como los elementos del mismo que tienen valor para la organización (servidores, archivos, personal, instalaciones, hardware, software,...). Estos activos según algunas metodologías como MAGERIT [35, 36, 37] están interrelacionados, de modo que el valor total del SI se concentra en unos pocos activos, llamados *activos terminales*, y el resto adquieren valor en virtud de la relación que tengan con los activos terminales. Esta relación se define como la probabilidad de que un fallo provocado en un activo se transmita a los activos terminales.

En general, diremos que el activo  $A_j$  *depende directamente* del activo  $A_i$ , y lo denotaremos por  $A_i \rightarrow A_j$ , si un fallo en el activo  $A_i$  provoca un fallo en el activo  $A_j$  con cierta probabilidad. A dicha probabilidad la llamamos *grado de dependencia directo* de  $A_j$  respecto a  $A_i$ , y la denotaremos por  $dd(A_i, A_j)$ . Estas dependencias forman un grafo como el que se puede ver, a modo de ejemplo, en la Figura 5.1.1. En esta figura se observa que entre un activo cualquiera  $A_i$  y un activo terminal  $A_k$  (datos o productos y servicios) puede haber activos intermedios, a través de los cuales se puede propagar un fallo generado en  $A_i$  hasta alcanzar el terminal  $A_k$ . De este modo, estamos interesados en calcular la probabilidad de transmisión de un fallo entre  $A_i$  y  $A_k$ . A esta probabilidad la llamaremos *grado de dependencia indirecto* entre  $A_i$  y  $A_k$  y la denotaremos por  $DD(A_i, A_k)$ . Estas probabilidades se pueden calcular en base a la Teoría del Cálculo de Probabilidades mediante la conocida fórmula de la probabilidad de la unión de varios sucesos independientes<sup>1</sup> [35, 36, 37]. Dichos sucesos son la transmisión del fallo desde  $A_i$  hasta  $A_k$  a través de los distintos activos intermedios que determinan todos los posibles caminos en el grafo de dependencias con origen en  $A_i$  y final en  $A_k$ .

Concretamente  $DD(A_i, A_k)$  se puede calcular mediante el siguiente algoritmo [58]:

Denotemos por  $\mathbf{P}=\{P_1, ..., P_s\}$  el conjunto de caminos que conectan  $A_i$  con  $A_k$ .

---

<sup>1</sup>Si  $p_1 = \text{probabilidad}(A_1)$  y  $p_2 = \text{probabilidad}(A_2)$  entonces  $p = p_1 + p_2 - p_1p_2$  es la probabilidad de la unión de ambos sucesos si éstos son independientes entre sí.

## 5.1. ANÁLISIS Y GESTIÓN DE RIESGOS BASADO EN LA METODOLOGÍA MAGERIT

---

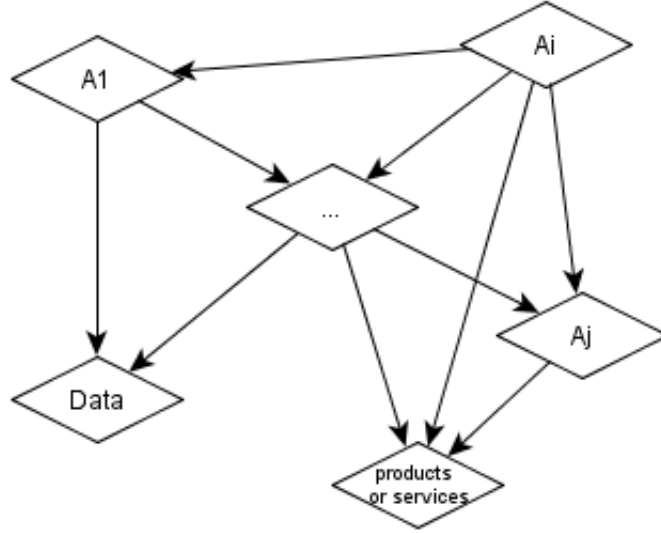


FIGURA 5.1.1. Esquema (o red) general de dependencias.

- A) Si todos los activos, salvo  $A_i$  y  $A_k$ , en los caminos de  $\mathbf{P}$  están influidos por un solo activo entonces:

$$DD(A_i, A_k) = \left( \sum_{j=1}^s \right) DD(A_i, A_k | P_j), \quad (5.1.1)$$

donde  $a(+)b = a + b - ab$  (en consistencia con la Teoría del Cálculo de Probabilidades),

$$DD(A_i, A_k | P_j) = dd(A_i, A_{j1}) \cdot dd(A_{j1}, A_{j2}) \cdot \dots \cdot dd(A_{jn}, A_k)$$

y

$$P_j : (A_i \rightarrow A_{j1} \rightarrow A_{j2} \rightarrow \dots \rightarrow A_{jn} \rightarrow A_k).$$

- B) En otro caso, podemos asumir que los primeros  $r$  caminos de  $\mathbf{P}$  están formados por caminos en los que cada activo está a su vez influido por un único activo, y los restantes  $s - r$  caminos incluyen activos que están a su vez influidos por varios activos simultáneamente. Entonces, para los  $r$  primeros caminos procedemos como en A), y denotamos por  $\mathbf{S}$  el conjunto de los  $s - r$  caminos restantes. En  $\mathbf{S}$  procedemos de la siguiente manera:

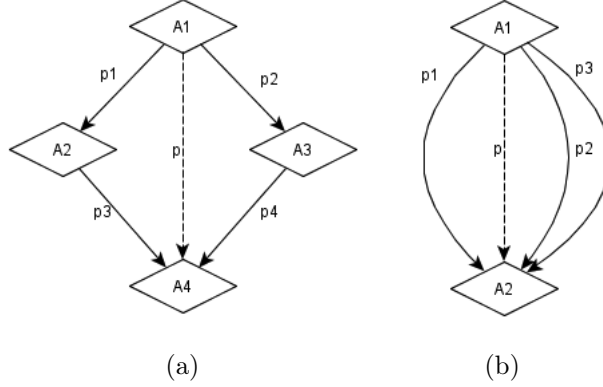


FIGURA 5.1.2. Estructuras de dependencias (ejemplos)

- (i) Consideramos el conjunto de activos no terminales de  $\mathbf{S}$  influidos por dos o más activos. Denotamos por  $I$  a este conjunto. Sea  $NI$  el subconjunto de  $I$  de los activos que no están influidos por otro activo de  $I$ .
- (ii) Consideremos un activo  $A_r$  de  $NI$ . Entonces, simplificamos el camino de  $\mathbf{S}$  que incluye el activo  $A_r$  tomando  $A_i \rightarrow A_r \rightarrow \dots \rightarrow A_k$ , con  $dd(A_i, A_r) = DD(A_i, A_r)$  que ha sido calculado en el paso anterior.
- (iii) Eliminamos los caminos repetidos de  $\mathbf{S}$  y mantenemos un único camino que agrupa a los anteriores.
- (iv) Construimos de nuevo los conjuntos  $I$  y  $NI$  de  $\mathbf{S}$ .
- (v) Si  $NI$  no es vacío volvemos al paso (ii). En otro caso, el algoritmo ha finalizado.

Denotemos el conjunto de caminos resultante por  $\mathbf{S} = \{P'_1, \dots, P'_m\}$  con  $m \leq s - r$ . Entonces, el grado de dependencia de  $A_k$ , dado  $A_i$  es

$$DD(A_i, A_k) = \left( \sum_{j=1}^r \right) DD(A_i, A_k | P_j) \left( \sum_{l=1}^m \right) DD(A_i, A_k | P'_l). \quad (5.1.2)$$

Como decimos, la razón de utilizar la operación  $(+)$  es la consistencia con el Cálculo de Probabilidades. Veámoslo con un ejemplo:

Consideremos la estructura de dependencias de la Figura 5.1.2(a), y supongamos que un fallo en el activo  $A_1$  puede provocar un fallo en el activo  $A_4$  por la vía de  $A_2$  o  $A_3$  con las probabilidades indicadas. Como estas vías no son necesariamente excluyentes, del cálculo de probabilidades se sigue que

## 5.1. ANÁLISIS Y GESTIÓN DE RIESGOS BASADO EN LA METODOLOGÍA MAGERIT

---

$$p = p_1p_3 + p_2p_4 - p_1p_3p_2p_4 = p_1p_3(+ )p_2p_4.$$

Si el fallo se puede propagar a través de tres activos (Figura 5.1.2(b)) en lugar de dos, entonces

$$p = p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_2p_3 - p_1p_3 + p_1p_2p_3 = p_1(+ )p_2(+ )p_3$$

(por comodidad, prescindimos de los activos intermedios)

En genearal, si la transmisión del fallo se puede realizar por  $n$  vías, entonces, por inducción en  $n$  se puede probar que:

$$p = p_1(+ )p_2(+ )...(+ )p_n = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i<j} p_i p_j + \sum_{i<j<k} p_i p_j p_k + ... + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n p_i.$$

Una vez calculados los grados de dependencia indirectos entre todos los activos con respecto a los activos terminales, se puede calcular el valor acumulado  $v_j$  de los activos de soporte a partir del valor propio  $v_k$  de los activos terminales, que se suele mediante en cinco componentes.

- **Confidencialidad.** ¿Qué daño causaría que lo conociera quien no debe?  
Esta valoración es típica de datos.
- **Integridad.** ¿Qué perjuicio causaría que estuviera dañado o corrupto? Esta valoración es típica de los datos, que pueden estar manipulados, ser total o parcialmente falsos o, incluso, faltar datos.
- **Autenticidad.** ¿Qué perjuicio causaría no saber exactamente quién hace o ha hecho cada cosa? Esta valoración es típica de servicios (autenticidad del usuario) y de los datos (autenticidad de quien accede a los datos para escribir o, simplemente, consultar)
- **Trazabilidad.** ¿Qué daño causaría no saber a quién se le presta tal servicio? O sea, ¿quién hace qué y cuándo? ¿qué daño causaría no saber quién accede a qué datos y qué hace con ellos?
- **Disponibilidad.** ¿Qué perjuicio causaría no tenerlo o no poder utilizarlo?  
Esta valoración es típica de los servicios.

Por tanto  $v_k$  y  $v_j$  son vectores de cinco componentes, y escribiremos

$$\vec{v}_j = (+ )DD(A_j, A_k)_k \vec{v}_k.$$

Una vez calculado el valor de todos los activos, consideraremos las amenazas que se ciernen sobre cada uno de ellos.

Las *amenazas* están caracterizadas por su probabilidad de materialización  $f$  y por la *degradación*  $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$  que provocan en cada componente de valor de los activos. De modo que el *impacto* de una amenaza sobre un activo  $A_j$  se mide por  $\vec{I}_j = (d_1 v_{j1}, d_2 v_{j2}, d_3 v_{j3}, d_4 v_{j4}, d_5 v_{j5})$ , y el *riesgo* sobre ese activo para la amenaza dada es  $\vec{R}_j = f \cdot (d_1 v_{j1}, d_2 v_{j2}, d_3 v_{j3}, d_4 v_{j4}, d_5 v_{j5})$ .

Algunos modelos sugieren agregar las componentes de valor, impacto y riesgo mediante ponderaciones, de modo que, por ejemplo, si todas las componentes tienen el mismo peso, el impacto y el riesgo sobre un activo para una amenaza es proporcional al producto escalar del valor del activo por la degradación de la amenaza.

Para este modelo de análisis de riesgos basta entonces asignar los grados de dependencia directos (probabilidades) entre los activos del SI, el valor de los activos terminales, la degradación de las amenazas y la probabilidad de materialización de las mismas.

Estas valoraciones en general no serán sencillas, ya que en multitud de ocasiones no se cuenta con datos históricos y no hay posibilidad de realización de experimentos con objeto de estimar las probabilidades. Entonces, es fundamental recurrir al conocimiento experto para realizar estas valoraciones. Sin embargo, los expertos suelen aportar información vaga e imprecisa y es aquí donde cobran sentido los planteamientos borrosos. La borrosificación del modelo descrito ha sido desarrollada por Vicente et al. en [58] y se expone a continuación.

## 5.2. Borrosificación del análisis de riesgos basado en la metodología MAGERIT

Consideremos en  $[0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$  la siguiente aritmética propuesta por Xu et al. [65]:

Si  $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_{\tilde{A}_1})$ ,  $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_{\tilde{A}_2}) \in [0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$  entonces:

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2 - a_1 a_2, b_1 + b_2 - b_1 b_2, c_1 + c_2 - c_1 c_2, d_1 + d_2 - d_1 d_2; \min w_{\tilde{A}_1}, w_{\tilde{A}_2})$$

$$\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2, d_1 \cdot d_2; \min w_{\tilde{A}_1}, w_{\tilde{A}_2})$$

Veamos que ambas operaciones ( $\oplus$  y  $\otimes$ ) están bien definidas:

**Proposición 1.**  $\oplus$  y  $\otimes$  son dos leyes de composición interna en el conjunto  $[0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$  que verifican las siguientes propiedades:

1. Ambas son conmutativas.
2. Ambas tienen elemento neutro.
3. Ambas son asociativas.

## 5.2. BORROSIFICACIÓN DEL ANÁLISIS DE RIESGOS BASADO EN LA METODOLOGÍA MAGERIT

---

*Demostración.* Las propiedades 1 y 3 son triviales, ya que se verifican en cada componente. El elemento neutro de  $\oplus$  es trivialmente el valor nítido  $(0,0,0,0;1)$ , mientras que el elemento neutro de  $\otimes$  es  $(1,1,1,1;1)$ .

Veamos que son dos leyes de composición interna. Es decir, que si  $\tilde{A}_1$  y  $\tilde{A}_2 \in [0, 1]^{\mathcal{F}}$  entonces  $\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2, \tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 \in [0, 1]^{\mathcal{F}}$ :

Si  $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_{\tilde{A}_1})$ ,  $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_{\tilde{A}_2}) \in [0, 1]^{\mathcal{F}} \Rightarrow 0 \leq a_1 \leq b_1 \leq c_1 \leq d_1 \leq 1$ ,  $0 \leq a_2 \leq b_2 \leq c_2 \leq d_2 \leq 1$ .

Entonces:

$$0 \leq a_1 + a_2 - a_1 a_2 = 1 - (1 - a_1)(1 - a_2) \leq 1 - (1 - b_1)(1 - b_2) = b_1 + b_2 - b_1 b_2 \leq 1,$$

Y por la misma razón

$$0 \leq b_1 + b_2 - b_1 b_2 \leq c_1 + c_2 - c_1 c_2 \leq d_1 + d_2 - d_1 d_2 \leq 1.$$

Además,  $0 \leq \min w_{\tilde{A}_1}, w_{\tilde{A}_2} \leq 1$ . Por tanto,  $\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 \in [0, 1]^{\mathcal{F}}$

Por otro lado, si  $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1$  y  $0 \leq a_2 \leq b_2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a_1 \cdot a_2 \leq b_1 \cdot b_2 \leq 1$ , y por la misma razón  $0 \leq b_1 \cdot b_2 \leq c_1 \cdot c_2 \leq c_1 \cdot c_2 \leq 1$ , por tanto  $\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2 \in [0, 1]^{\mathcal{F}}$ .

El interés de las operaciones dadas radica en la acotación del conjunto de números borrosos. Podemos asegurar que las operaciones entre términos lingüísticos borrosos trapezoidales de una escala en  $[0,1]$  van a permanecer en  $[0, 1]^{\mathcal{F}}$ , y mediante una función de similitud los resultados de estas operaciones se podrán traducir en uno de los términos lingüísticos de la escala. Además la operación  $\oplus$  es consistente con la metodología establecida en la sección anterior, y permite interpretaciones en términos probabilísticos. Veamos estas cuestiones con más detalle.

La operación  $(+)$  es un caso particular de  $\oplus$ , ya que un número real  $a \in [0, 1]$  se puede escribir en modo borroso como  $a \approx \tilde{a} = (a, a, a, a)$ , y por tanto

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (a, a, a, a) \oplus (b, b, b, b) = (a+b-ab, a+b-ab, a+b-ab, a+b-ab) = \widetilde{a(+)b} \approx a(+)b.$$

Por otro lado, la operación  $\otimes$  extiende de manera natural al producto de números reales.

Por tanto, con la definición de las operaciones  $\oplus$  y  $\otimes$  hemos conseguido extender las operaciones básicas que utiliza la metodología expuesta en la sección anterior al contexto de los números borrosos trapezoidales. Además, estas operaciones son consistentes con el Cálculo de Probabilidades.

Dadas las operaciones  $\oplus$  y  $\otimes$ , la metodología para derivar la dependencia de cada activo de los activos terminales consiste en los siguientes pasos:

Término	Número borroso
Muy Bajo (VL)	(0, 0, 0, 0.05)
Bajo (L)	(0, 0.075, 0.125, 0.275)
Medio-Bajo (M-L)	(0.125, 0.275, 0.325, 0.475)
Medio (M)	(0.325, 0.475, 0.525, 0.675)
Medio- Alto (M-H)	(0.525, 0.675, 0.725, 0.875)
Alto (H)	(0.725, 0.875, 0.925, 1)
Muy Alto (VH)	(0.925, 1, 1, 1)

TABLA 5.2.1. Términos lingüísticos

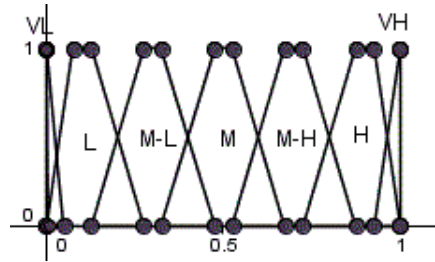


FIGURA 5.2.1. Expresión gráfica de la escala de la Tabla 5.2.1

- Paso 1: Se establece una escala de términos lingüísticos borrosos (un modelo de representación).
- Paso 2: Se determina el grado de influencia de cada dos activos consecutivos en la estructura general de dependencias, estimando un término lingüístico de la escala dada.
- Paso 3: Se determina el grado de influencia indirecto de los activos respecto de los activos terminales, mediante las ecuaciones (5.1.1) y (5.1.2) (borrosificando las operaciones ). Este grado de dependencia será un número borroso trapezoidal.

**Ejemplo.** Consideremos la estructura de dependencias dada en la Figura 5.2.2 en la que el único activo terminal es  $A_6$ , y, por tanto, todo el valor del sistema se concentra en este activo.

Una escala lingüística útil para este proceso se puede ver en la Tabla 5.2.1, Figura 5.2.1.



## 5.2. BORROSIFICACIÓN DEL ANÁLISIS DE RIESGOS BASADO EN LA METODOLOGÍA MAGERIT

---

En la Figura 5.2.2 se han señalado los grados de dependencia directos entre los activos, utilizando los términos lingüísticos de la Tabla 5.2.1.

A continuación, calculamos el grado de influencia indirecto del activo  $A_1$  sobre el activo  $A_6$ .

El conjunto de caminos que conectan  $A_1$  con  $A_6$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & \{P_1 : (A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_6), P_2 : (A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_6), \\ & P_3 : (A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_6), P_4 : (A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_6), \\ & P_5 : (A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_6), P_6 : (A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow A_6), \\ & P_7 : (A_1 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6)\}, \end{aligned}$$

El activo  $A_3$  está influido por  $A_1$  y  $A_2$ , y  $A_4$  está influido por  $A_1$  y  $A_3$ . Por tanto, aplicamos el apartado B) del algoritmo de la Sección 2, con  $r = 2$  y  $\mathbf{S} = \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$  y procedemos como sigue:

- (i)  $I = \{A_3, A_4\}$  y  $NI = \{A_3\}$ .
- (ii) Seleccionamos  $A_3$ , entonces podemos simplificar  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  y  $P_5$  mediante  $P'_2 : (A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_6)$ ,  $P'_3 : (A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_6)$ ,  $P'_4 : (A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_6)$  y  $P'_5 : (A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_6)$ , respectivamente, con  $\widetilde{dd(A_1, A_3)} = \widetilde{DD(A_1, A_3)} = \left( \widetilde{dd(A_1, A_2)} \otimes \widetilde{dd(A_2, A_3)} \right) \oplus \widetilde{dd(A_1, A_3)}$ .
- (iii)  $\mathbf{S} = \{P'_2, P'_3, P'_6\}$  ya que  $P'_2 = P'_4$  y  $P'_3 = P'_5$ .
- (iv)  $I = \{A_4\}$  y  $NI = \{A_4\}$ .
- (v) Ir al paso (ii).
- (ii) Seleccionamos  $A_4$ , entonces simplificamos los caminos  $P'_3$  y  $P'_6$  como  $P''_3 : (A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow A_6)$ , y  $P'_6 : (A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow A_6)$ , respectivamente, con  $\widetilde{dd(A_1, A_4)} = \widetilde{DD(A_1, A_4)} = \left( \widetilde{dd(A_1, A_3)} \otimes \widetilde{dd(A_3, A_4)} \right) \oplus \widetilde{dd(A_1, A_4)}$ .
- (iii)  $\mathbf{S} = \{P'_2, P''_3\}$  ya que  $P''_3 \equiv P'_6$ .
- (iv)  $I = \emptyset$  y  $NI = \emptyset$ .
- (v) El algoritmo finaliza, ya que  $NI = \emptyset$ .

Finalmente,  $\mathbf{S} = \{P'_2, P''_3\}$  y el grado de dependencia de  $A_6$  con respecto a  $A_1$  es  $\widetilde{DD(A_1, A_6)} = \widetilde{DD(A_1, A_6|P_1)} \oplus \widetilde{DD(A_1, A_6|P_7)} \oplus \widetilde{DD(A_1, A_6|P'_2)} \oplus \widetilde{DD(A_1, A_6|P''_3)} = (\widetilde{dd(A_1, A_2)} \otimes \widetilde{dd(A_2, A_6)}) \oplus (\widetilde{dd(A_1, A_5)} \otimes \widetilde{dd(A_5, A_6)}) \oplus (\widetilde{dd(A_1, A_3)} \otimes \widetilde{dd(A_3, A_6)}) \oplus (\widetilde{dd(A_1, A_4)} \otimes \widetilde{dd(A_4, A_6)})$

Sustituyendo los arcos por los términos lingüísticos que indican los grados de dependencia obtenemos:

$$\begin{aligned}
& [[H \otimes [VL \otimes [(M \otimes L) \oplus L] \oplus H]] \oplus (L \otimes VL) \oplus \\
& \quad \oplus \{[(H \otimes VL) \oplus M] \otimes [(M \otimes L) \oplus L]\} \oplus \\
& \quad \oplus \{[[[(H \otimes VL) \oplus M] \otimes M] \oplus M - H] \otimes L\} = \\
& \quad [[(0.725, 0.875, 0.925, 1) \otimes [(0, 0, 0, 0.05) \otimes \\
& \quad \otimes [(0.325, 0.475, 0.525, 0.675) \otimes \\
& \quad \otimes (0, 0.075, 0.125, 0.275)] \oplus \\
& \quad \oplus (0, 0.075, 0.125, 0.275)] \oplus \\
& \quad \oplus (0.725, 0.875, 0.925, 1)]] \oplus \\
& \quad \oplus ((0, 0.075, 0.125, 0.275) \otimes (0, 0, 0, 0.05)) \oplus \\
& \quad \oplus \{[(0.725, 0.875, 0.925, 1) \otimes (0, 0, 0, 0.05)) \\
& \quad \oplus (0.325, 0.475, 0.525, 0.675)] \otimes \\
& \quad \otimes [(0.325, 0.475, 0.525, 0.675) \otimes \\
& \quad \otimes (0, 0.075, 0.125, 0.275)] \oplus \\
& \quad \oplus (0, 0.075, 0.125, 0.275)]\} \oplus \\
& \quad \oplus \{[[[(0.725, 0.875, 0.925, 1) \otimes (0, 0, 0, 0.05)) \oplus \\
& \quad \oplus (0.325, 0.475, 0.525, 0.675)] \otimes \\
& \quad \otimes (0.325, 0.475, 0.525, 0.675)] \oplus \\
& \quad \oplus (0.525, 0.675, 0.725, 0.875)] \otimes \\
& \quad \otimes (0, 0.075, 0.125, 0.275)]\} = \\
& \quad (0.525, 0.765, 0.855, 1) \oplus \\
& \quad \oplus (0, 0, 0, 0.013) \oplus \\
& \quad \oplus (0.325, 0.531, 0.611, 0.817) \oplus \\
& \quad \oplus (0, 0.056, 0.1, 0.256) = \\
& \quad (0.679, 0.891, 0.949, 1).
\end{aligned}$$

De forma análoga se calculan los grados de dependencia del resto de activos no terminales, dados en la Tabla 5.2.2

## 5.2. BORROSIFICACIÓN DEL ANÁLISIS DE RIESGOS BASADO EN LA METODOLOGÍA MAGERIT

---

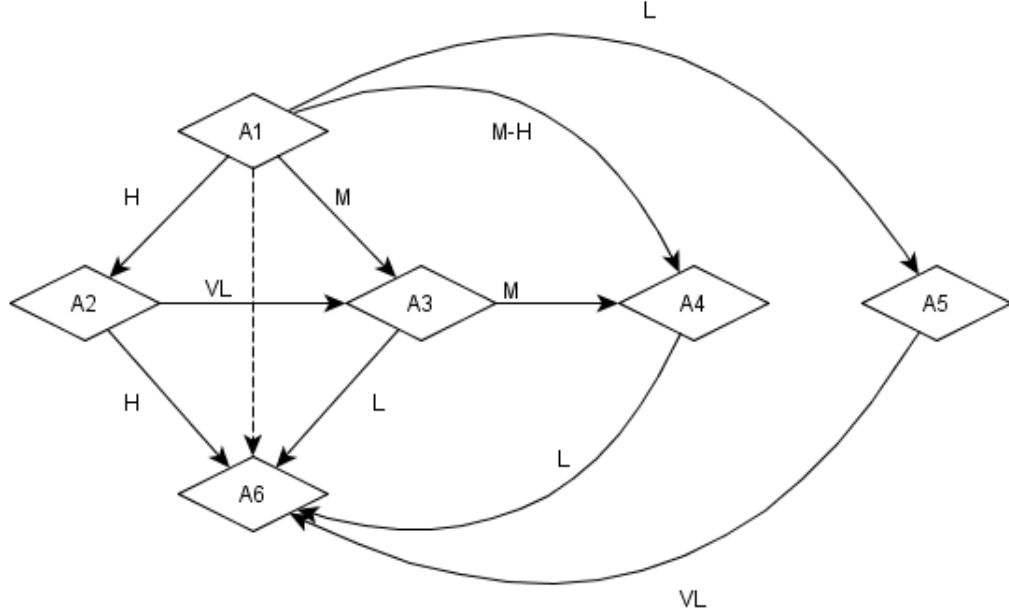


FIGURA 5.2.2. Estructura general de dependencias.

$A_i$	$\widetilde{DD}(A_i, A_6)$
$A_1$	(0.679, 0.891, 0.949, 1)
$A_2$	(0.725, 0.875, 0.925, 1)
$A_3$	(0, 0.107, 0.182, 0.409)
$A_4$	(0, 0.075, 0.125, 0.275)
$A_5$	(0, 0, 0, 0.05)

TABLA 5.2.2. Grados de dependencia sobre el activo terminal

**5.2.1. Valor Acumulado en los activos de soporte.** Podemos escribir el valor propio en los activos terminales como  $\tilde{v}_j = (\tilde{v}_{j(1)}, \tilde{v}_{j(2)}, \tilde{v}_{j(3)}, \tilde{v}_{j(4)}, \tilde{v}_{j(5)})$ , donde  $\tilde{v}_{j(i)}$  será un término lingüístico borroso asignado por un experto en la componente de valor  $(i)$ -ésima para el activo  $A_j$ .

El valor acumulado de un activo de soporte  $A_i$  respecto de los activos terminales  $A_j$  es

$$\tilde{v}_{i(l)} = \bigoplus_{j=1}^n ((\widetilde{DD}(A_i, A_j)) \otimes \tilde{v}_{j(l)}). \quad (5.2.1)$$

Para obtener el valor acumulado de los activos no terminales seguiremos, entonces, los siguientes pasos:

- Paso 4: Se estima el valor en cada componente de los activos terminales asignando un término lingüístico.
- Paso 5: Se calcula el valor acumulado en el resto de activos mediante la ecuación (5.2.1).

**Ejemplo (continuación):** Supongamos que los expertos asignan un valor sobre  $A_6$  dado por sus cinco componentes de  $\tilde{v}_{6(i)} = (H, H, M, L, H)$ . Entonces el valor acumulado sobre  $A_1$  se calcula aplicando la ecuación (3), de donde obtenemos la Tabla 5.2.3.

**5.2.2. Amenazas. Indicadores de impacto y riesgo, y uso de la función de similitud.** Una amenaza es un vector  $\vec{u} = (\tilde{f}, \tilde{D})$  cuyas componentes son la frecuencia y la degradación. Esta última, a su vez se puede dar en cada componente de valor.

Consideremos una amenaza sobre el activo  $A_j$  cuya degradación en cada componente viene dada por el vector  $\vec{D} = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3, \tilde{d}_4, \tilde{d}_5)$ .

Es decir, que la amenaza provoca una degradación de gravedad  $\tilde{d}_i$  en la componente  $i$ -ésima del activo.

Cuando la amenaza se materializa, cada componente se verá afectada según la expresión

$$\tilde{I}_{j(i)} = \tilde{d}_i \otimes \tilde{v}_{j(i)}. \quad (5.2.2)$$

$\tilde{I}$  es el impacto provocado sobre el activo atacado. Para calcular el riesgo sobre este activo podemos utilizar la expresión

$$\tilde{R}_{j(i)} = \tilde{I}_{j(i)} \otimes \tilde{f}. \quad (5.2.3)$$

Una vez calculado el impacto provocado por una amenaza materializada sobre un activo del sistema podemos calcular el impacto transmitido a los activos inferiores que dependen del activo atacado.

Si  $A_j$  es el activo sobre el que se ha materializado la amenaza y  $A_k$  un activo inferior cuyo grado de dependencia con  $A_j$  es  $\widetilde{DD(A_j, A_k)}$ , entonces la amenaza sobre el activo  $A_j$  provoca un impacto sobre  $A_k$  de  $\tilde{I}_{k(i)} = \widetilde{DD(A_j, A_k)} \otimes \tilde{d} \otimes \tilde{v}_{k(i)}$ , de modo que el riesgo sobre el activo inferior será  $\tilde{R}_{k(i)} = \tilde{I}_{k(i)} \otimes \tilde{f}$ .

Por tanto, tras identificar las amenazas, su degradación y su frecuencia, los pasos que seguiremos para identificar el impacto y el riesgo sobre los activos atacados son:

### 5.3. GESTIÓN DE RIESGOS MEDIANTE ALGORITMOS EVOLUTIVOS Y PROGRAMACIÓN DINÁMICA EN AMBIENTE BORROSO

Componente	$\tilde{v}_{1(l)}$
Confidencialidad	(0.492, 0.779, 0.877, 1)
Integridad	(0.492, 0.779, 0.877, 1)
Autenticidad	(0.220, 0.423, 0.498, 0.675)
Trazabilidad	(0, 0.066, 0.118, 0.275)
Disponibilidad	(0.492, 0.779, 0.877, 1)

TABLA 5.2.3. Valor acumulado de  $A_1$  en cada componente.

Componente	Impacto	Riesgo
Confidencialidad	(0.35, 0.68, 0.81, 1)	(0.11, 0.32, 0.43, 0.67)
Integridad	(0, 0.05, 0.10, 0.27)	(0, 0.02, 0.05, 0.18)
Autenticidad	(0.07, 0.2, 0.26, 0.45)	(0.02, 0.09, 0.13, 0.30)
Trazabilidad	(0, 0, 0, 0.013)	(0, 0, 0, 0.01)
Disponibilidad	(0.16, 0.37, 0.46, 0.67)	(0.05, 0.17, 0.24, 0.45)

TABLA 5.2.4. Indicadores de impacto y riesgo sobre  $A_1$

- Paso 6: Se calculan los parámetros de impacto y riesgo en cada activo mediante las ecuaciones (5.2.2) y (5.2.3).
- Paso 7: Finalmente, el resultado borroso trapezoidal se asocia a uno de los términos lingüísticos de la escala dada mediante una función de similitud.

Consideremos una amenaza sobre el activo  $A_1$  con una degradación  $\tilde{D} = (H, L, M, VL, M)$  y una frecuencia  $\tilde{f} = M$ . Entonces los indicadores de impacto y riesgo, que resultan de las ecuaciones (5.2.2) y (5.2.3) se pueden ver en la Tabla 5.2.4.

### 5.3. Gestión de riesgos mediante Algoritmos Evolutivos y Programación Dinámica en ambiente borroso

Supuesto realizado el análisis de riesgos (valorados los activos y sus grados de dependencias, identificadas las amenazas, su impacto y riesgo sobre los activos,...) el siguiente paso consiste en identificar las *salvaguardas*, y elegir un conjunto eficiente

de ellas. Las salvaguardas son acciones sobre los activos que pueden reducir el riesgo ante las amenazas. Pueden ser de dos tipos:

- *Salvaguardas preventivas*: Reducen la frecuencia de la amenaza.
- *Salvaguardas paliativas*: Reducen el impacto de la amenaza sobre los activos (en cada componente).

En el caso de *salvaguardas paliativas*, el efecto provocado sobre una amenaza que se cierne sobre un activo tiene, al igual que el impacto de dicha amenaza, cinco componentes; mientras que si la salvaguarda es preventiva, el efecto tiene una única componente. Tales componentes serán términos lingüísticos de la escala predefinida en el análisis de riesgos.

La operación natural de sustracción en  $[0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$  se define de la siguiente manera. Dados  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ,  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in [0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$  entonces

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1).$$

Nótese que la diferencia entre dos números borrosos trapezoidales de  $[0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$  no tiene por qué pertenecer a dicho conjunto. Sin embargo, dado  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  se tiene que

$$\tilde{1} \ominus \tilde{A} = (1 - a_4, 1 - a_3, 1 - a_2, 1 - a_1) \in [0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}},$$

puesto que si  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 1$  se tiene que  $0 \leq 1 - a_4 \leq 1 - a_3 \leq 1 - a_2 \leq 1 - a_1 \leq 1$ .

El efecto  $\tilde{e} \in [0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$  de una salvaguarda  $S_i$  preventiva sobre un activo  $A$  y una amenaza dada, provoca una reducción de la frecuencia de la amenaza de proporción  $\tilde{1} \ominus \tilde{e}$ . Es decir, que la frecuencia de la amenaza dada con la salvaguarda  $S_i$  se reduce al nivel

$$\tilde{f}' = \tilde{f} \otimes (\tilde{1} \ominus \tilde{e}). \quad (5.3.1)$$

La expresión es similar para una salvaguarda paliativa sobre cada componente de la degradación provocada por una amenaza sobre un activo:

Si el efecto de una salvaguarda paliativa es  $\vec{\tilde{e}} = (\tilde{e}_{(1)}, \tilde{e}_{(2)}, \tilde{e}_{(3)}, \tilde{e}_{(4)}, \tilde{e}_{(5)})$  entonces la degradación provocada por la amenaza se reduce al nivel

$$\tilde{d}'_{(i)} = \tilde{d}_{(i)} \otimes (\tilde{1} \ominus \tilde{e}_{(i)}). \quad (5.3.2)$$

Nótese que  $\forall \tilde{X} \in [0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$  se tiene que  $\tilde{X} \otimes \tilde{A} \leq \tilde{A} \quad \forall \tilde{A} \in [0, 1]^{\mathcal{T}\mathcal{F}}$ . En particular  $\tilde{f}' \leq \tilde{f}$  y  $\tilde{d}'_{(i)} \leq \tilde{d}_{(i)}$ .

### 5.3. GESTIÓN DE RIESGOS MEDIANTE ALGORITMOS EVOLUTIVOS Y PROGRAMACIÓN DINÁMICA EN AMBIENTE BORROSO

---

El efecto provocado por varias salvaguardas sobre la degradación y la frecuencia de una amenaza sobre un activo  $A$  se calcula aplicando sucesivamente las expresiones (5.3.1) y (5.3.2).

Es decir, que si implementamos  $m$  salvaguardas  $S_1^{Prev}, \dots, S_m^{Prev}$  preventivas, entonces la probabilidad de materialización de la amenaza se reduce al nivel  $\tilde{f}' = \tilde{f} \otimes [\bigotimes_{k=1}^m (\tilde{1} \ominus \tilde{e}_k)]$ , siendo  $\tilde{e}_k$  el efecto provocado por la salvaguarda  $S_k^{Prev}$  sobre la frecuencia de la amenaza.

Y si implementamos  $n$  salvaguardas paliativas  $S_1^{Pal}, \dots, S_n^{Pal}$ , entonces la degradación sufrida por el activo atacado al materializarse la amenaza, se reduce al nivel  $\tilde{d}'_{(i)} = \tilde{d}_{(i)} \otimes [\bigotimes_{j=1}^n (\tilde{1} \ominus \tilde{e}_{j(i)})]$  siendo  $\tilde{e}_{j(i)}$  el efecto provocado por la salvaguarda paliativa  $S_j^{Pal}$  en la componente  $i$ -ésima de la degradación de la amenaza.

**5.3.1. Selección de salvaguardas sobre un activo mediante algoritmos evolutivos multiobjetivo en ambiente borroso.** Las normas internacionales de la serie ISO/IEC 27000 no recomiendan métodos específicos para la selección de salvaguardas, y dejan a los gestores la elección del método que estimen más adecuado, mientras que las distintas metodologías señaladas anteriormente proponen generalmente el análisis coste-beneficio como método de selección de salvaguardas. Este análisis contrapone el coste total de un conjunto de salvaguardas con el beneficio provocado.

Sin embargo, el carácter combinatorio del problema de la selección de salvaguardas, dificulta la optimización cuando el número de ellas es alto, más aun cuando el beneficio es multicriterio, como es el caso, de modo que los gestores pueden aplicar el análisis coste-beneficio sobre varios paquetes de salvaguardas que pueden estar dominados por otros paquetes que no han considerado. Las técnicas de optimización combinatoria pueden resolver este problema de forma eficiente, mediante la implementación en ordenador de metaheurísticas de búsqueda multiobjetivo.

Consideremos una amenaza sobre un activo  $A$  para la cual podemos identificar un paquete de salvaguardas paliativas  $S^{Pal} = \{S_j^{Pal}, j = 1, \dots, n.\}$  cada una de las cuales tiene un coste económico de  $C_j \in \mathbb{R}^+$ , y otro paquete de salvaguardas preventivas  $S^{Prev} = \{S_k^{Prev}, k = 1, \dots, m.\}$ , cada una de las cuales tiene un coste económico de  $C_k \in \mathbb{R}^+$ .

El efecto de las salvaguardas paliativas es  $\vec{\tilde{e}}_j = (\tilde{e}_{j(1)}, \tilde{e}_{j(2)}, \tilde{e}_{j(3)}, \tilde{e}_{j(4)}, \tilde{e}_{j(5)})$  y el de las preventivas  $\tilde{e}_k$ .

Tratamos de elegir un conjunto de salvaguardas preventivas y paliativas que minimicen el riesgo soportado, en cada componente  $i$ -ésima, por el activo  $A$ , ante la amenaza dada, sujeto a un presupuesto  $C$  dado:

$$\min \tilde{R}'_{(l)} = \left\{ \tilde{d}_{(l)} \otimes \left[ \bigotimes_{j=1}^n (\tilde{1} \ominus \tilde{e}_{j(l)}) \otimes \tilde{x}_j \right] \right\} \otimes \left\{ \tilde{f} \otimes \left[ \bigotimes_{k=1}^m (\tilde{1} \ominus \tilde{e}_k) \otimes \tilde{x}_k \right] \right\} \tilde{v}_{Al}$$

$$l = 1, \dots, 5$$

sujeto a

$$\sum C_j x_j + \sum C_k x_k \leq C$$

$$\tilde{x}_j, \tilde{x}_k \in \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \forall j = 1, \dots, n, \forall k = 1, \dots, m$$

Este problema constituye una versión borrosa multiobjetivo del clásico Problema de la Mochila 0/1, que consiste en llenar una mochila optimizando el valor del conjunto de objetos que la componen con una restricción de capacidad [57]. Es de sobra conocido que se trata de un problema *NP-duro* de modo que no se puede resolver en tiempo polinomial, y es preciso recurrir a algoritmos de búsqueda aproximada procedentes del campo de las técnicas metaheurísticas. El tratamiento pionero del problema fue planteado por Dantzig en 1957[14], y desde entonces se ha propuesto una gran variedad de algoritmos para tratar diversas versiones del problemas.

Un conjunto de técnicas especialmente potentes para la resolución del problema lo constituyen los Algoritmos Evolutivos (AE). Estos algoritmos parten de una población de soluciones que evoluciona mediante la aplicación de operadores de cruce, mutación y selección hasta alcanzar niveles de calidad aceptables por los decisores. En su versión uniobjetivo, la selección de las soluciones que pasan a la siguiente generación, se realiza mediante una función de evaluación (fitness), si bien se precisa mantener suficiente diversidad en la población para evitar caer en óptimos locales. Sin embargo, en la versión multiobjetivo (AEMO) aparecen los conceptos de dominancia y frontera de Pareto. Al aplicar un AEMO en un problema de optimización multiobjetivo tratamos de aproximar la frontera de Pareto, de modo que obtengamos una población reducida de soluciones no dominadas, de buena calidad y suficientemente diversa, en la que el decisor deberá escoger la solución más interesante para él.

Por su calidad, uno de los algoritmos multiobjetivo más utilizados hoy en día es el NSGA II, propuesto por Deb et al. en 2000 [15]. El esquema del algoritmo se puede



### 5.3. GESTIÓN DE RIESGOS MEDIANTE ALGORITMOS EVOLUTIVOS Y PROGRAMACIÓN DINÁMICA EN AMBIENTE BORROSO

---

ver gráficamente en la Figura 5.3.1.

En el paso  $t$ , NSGA II consta de dos poblaciones  $P_t$  y  $Q_t$ , la mejor de las cuales es  $P_t$ . A partir de aquí, se ordena la población  $R_t = P_t \cup Q_t$  en varios frentes de dominancia, de modo que el primer frente ( $F_1$ ) está formado por soluciones no dominadas dentro de la población  $R_t$ ,  $F_2$  está formado por soluciones que están dominadas únicamente por las soluciones de  $F_1$ , y en general  $F_i$  son las soluciones de  $R_t$  dominadas únicamente por las soluciones de los frentes anteriores. A continuación, formamos la población  $P_{t+1}$  uniendo los mejores frentes hasta encontrar un frente  $F_i$  que ya no quepa en  $P_{t+1}$  (se debe mantener el tamaño  $N$  de población). Entonces, mediante la *distancia de crowding*, se seleccionan de  $F_i$  las soluciones necesarias hasta completar  $P_{t+1}$ . Esta distancia es la longitud del perímetro del hipercubo formado por el valor objetivo de dos soluciones. Para cada solución  $x$  de  $F_i$ , se considera la distancia de crowding entre los objetivos de las dos soluciones más próximas a  $x$ , de modo que se eliminan las soluciones  $x \in F_i$  con los valores más pequeños obtenidos de esta manera. Las soluciones de los extremos se seleccionan siempre.

Un ejemplo puede verse en la Figura 5.3.2. Las soluciones  $x$  y  $z$  se seleccionan por ser extremas y, puesto que el perímetro del hipercubo formado por  $f(y)$  y  $f(z)$  es mayor que el perímetro del hipercubo formado por  $f(x)$  y  $f(t)$ , la siguiente en seleccionarse sería la solución  $t$ . El interés de esta selección en  $F_i$  estriba en dar diversidad a la población que pasa a la siguiente generación. Una vez que se ha construido la población  $P_{t+1}$ , se aplican los operadores de cruce y mutación para generar la población  $Q_{t+1}$  y se vuelven a formar los frentes de dominancia.

Otro algoritmo potente en la optimización multiobjetivo es el SPEA II (*Strength Pareto Evolutionary Algorithms*) de Zitler, Laumanns y Thiele [73]. El pseudocódigo de este algoritmo es el siguiente:

- Paso 0: Generar una población inicial de soluciones  $P_0$  y un archivo inicial  $\bar{P}_0 = \emptyset$ .
- Paso 1: Asignar un valor fitness a cada individuo de  $P_t$  y  $\bar{P}_t$ .
- Paso 2: Copiar los individuos no dominados de  $P_t$  a  $\bar{P}_t$ , formando  $\bar{P}_{t+1}$ .
  - Si  $|\bar{P}_{t+1}| > n$  se reduce el tamaño por medio de un operador de truncamiento.
  - Si  $|\bar{P}_{t+1}| < n$  se rellena con los mejores individuos dominados de  $P_t$  y  $\bar{P}_t$ .

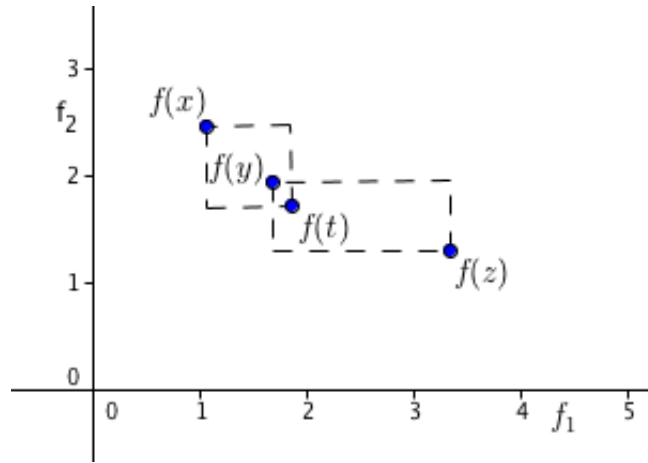


FIGURA 5.3.2. crowding

- Paso 3: Si se cumple la condición de parada, finaliza el algoritmo.
- Paso 4: Mediante torneo se seleccionan los individuos que se van a reproducir.
- Paso 5: Se aplican los operadores de reproducción y mutación para formar la población  $P_{t+1}$ . Se va al paso 2.

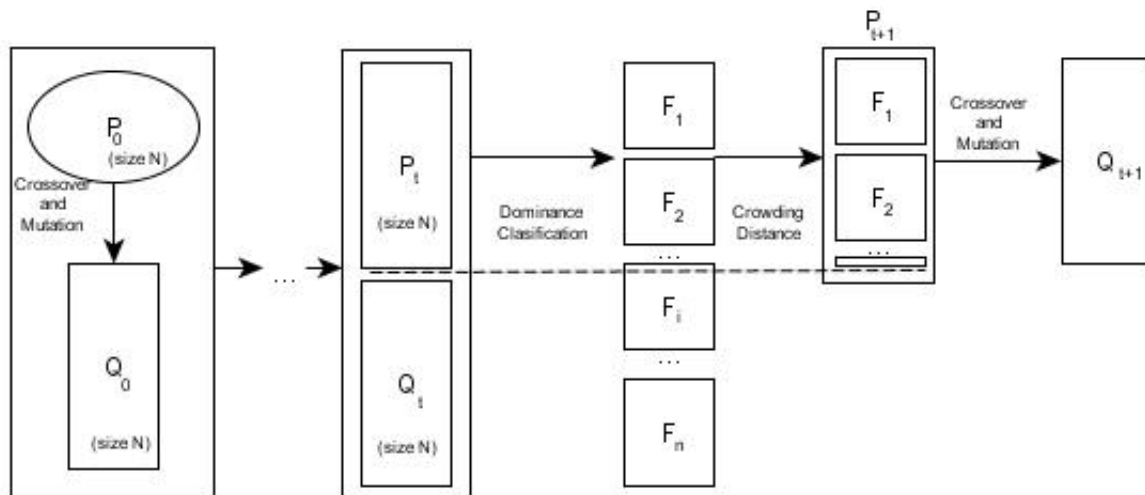


FIGURA 5.3.1. Algoritmo NSGA II

### 5.3. GESTIÓN DE RIESGOS MEDIANTE ALGORITMOS EVOLUTIVOS Y PROGRAMACIÓN DINÁMICA EN AMBIENTE BORROSO

---

El valor de fitness que se utiliza en el algoritmo original consiste en calcular  $S(i) = |\{j : j \in P_t \cup \bar{P}_t, i \succ j\}|$  para cada individuo  $i$  de la población, donde  $\succ$  es la relación de dominancia de Pareto. A continuación, se calcula  $R(i) = \sum_{P_t \cup \bar{P}_t, j \succ i} S(j)$ . Finalmente se calcula una función de densidad de población en torno a cada solución para facilitar la selección de individuos diversos en caso de que la mayoría de las soluciones de la población actual sean no dominadas. Esta función de densidad de población es  $D(i) = \frac{1}{\sigma_i^k + 2}$ , donde  $\sigma_i^k$  es la distancia euclídea del individuo  $i$  a su  $k$ -ésimo vecino más cercano. Los autores proponen  $k = \sqrt{|P_t| + |\bar{P}_t|}$ . Entonces, la función definitiva de fitness es  $F(i) = R(i) + D(i)$ .

Nótese que los mejores individuos son los que tienen un fitness más bajo. En particular sólo las soluciones no dominadas tienen un fitness menor que 1, y cuanto más aisladas están, más bajo es su fitness.

En cuanto a la selección de truncamiento del paso 2, el operador consiste en eliminar iterativamente soluciones  $i$  tales que  $i \leq_d j \forall j \in |\bar{P}_{t+1}|$  donde  $i \leq_d j$  si, y sólo si

$$\begin{aligned} & \forall 0 < k < |\bar{P}_{t+1}| : \sigma_i^k = \sigma_j^k \vee \\ & \exists 0 < k < |\bar{P}_{t+1}| : [(\forall 0 < l < k : \sigma_i^l = \sigma_j^l) \wedge \sigma_i^k < \sigma_j^k] \end{aligned}$$

Es decir, se borran los individuos en función de la distancia a otros individuos para mantener la máxima diversidad posible.

**Criterios de Parada borrosos.** Las metodologías de Análisis y Gestión de Riesgos en los SI dadas en la sección anterior recomiendan la determinación de un nivel de riesgo asumible para la Organización. Consideremos entonces un nivel de riesgo  $[0, 1]^{\mathcal{T}FG}$  despreciable en cada componente de valor (este nivel de riesgo asumible puede ser un valor de la escala previamente definida o un número borroso definido *ad hoc* por los decisores). Entonces, si  $\tilde{R}' = (\tilde{R}'_i)_{i=1}^5$  es la función multiobjetivo del problema a optimizar, debemos imponer que  $\tilde{R}'_i \leq \tilde{U}_i$ .

En ambiente nítido un umbral de aceptación para la función objetivo es, con frecuencia, denominado *cota de Dantzig* del problema de la mochila [38, 57]. De modo que llamaremos *cota de Dantzig borrosa* al valor  $\tilde{U}_i$  en nuestro problema. Sin embargo la condición  $\tilde{R}'_i \leq \tilde{U}_i$  es excesivamente restrictiva, según el orden (parcial) definido en  $[0, 1]^{\mathcal{T}FG}$ , ya que la desigualdad  $\leq$  se debe cumplir componente a componente en los números borrosos trapezoidales. Pero se pueden definir criterios de parada más relajados en los algoritmos heurísticos de búsqueda de solución. Uno de

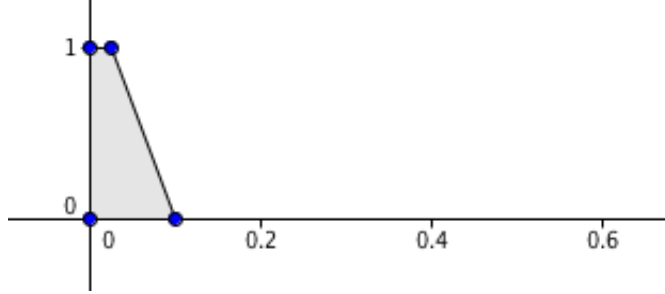


FIGURA 5.3.3. Cota de Dantzig borrosa.

estos criterios se puede ver en Verdigay y Vergara [57], que utilizan el algoritmo de Horowitz-Sahni y Programación Dinámica para resolver el problema en ambiente nítido, mientras que su criterio de parada es borroso. La idea que expresan estos autores consiste en que el decisor tiene una idea imprecisa de la aceptabilidad del resultado final del algoritmo, de modo que éste finaliza cuando el objetivo alcanza un cierto grado de pertenencia al término lingüístico “acceptable” dado por el decisor, es decir cuando  $\mu(z) \geq \alpha$  con  $\mu(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < L_0 \\ f(t), & \text{si } L_0 \leq z \leq U_0 \end{cases}$  como función de pertenencia al término “acceptable” del decisor. Donde  $z$  es el objetivo (nítido) a optimizar,  $f$  es una función no decreciente que valora en  $[0,1]$ ,  $U_0$  es la cota de Dantzig dada por el decisor, y  $L_0$  es una cota inferior convenientemente elegida [57].

En ambiente borroso podemos adaptar la misma idea de Verdigay y Vergara utilizando la función de similitud definida en la Sección 4.2, de modo que el criterio de parada para un algoritmo heurístico será el alcance de un cierto nivel de similitud entre el objetivo y la cota de Dantzig borrosa. Es decir, el algoritmo termina cuando  $S(\tilde{R}'_i, \tilde{U}_i) \geq \alpha_i \in (0, 1)$ .

Entonces el problema se puede escribir como

$$\max S(\tilde{R}'_i, \tilde{U}_i) \geq \alpha_i \quad i = 1, \dots, 5.$$

sujeto a

$$\sum C_j x_j + \sum C_k x_k \leq C$$

$$\tilde{x}_j, \tilde{x}_k \in \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \quad \forall j = 1, \dots, n, \forall k = 1, \dots, m$$

### 5.3. GESTIÓN DE RIESGOS MEDIANTE ALGORITMOS EVOLUTIVOS Y PROGRAMACIÓN DINÁMICA EN AMBIENTE BORROSO

---

Otro problema útil en la selección de salvaguardas para cada activo y amenaza es el problema inverso del anterior, es decir:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum C_j x_j + \sum C_k x_k \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \tilde{R}'_{(l)} = \left\{ \tilde{d}_{(l)} \otimes \left[ \bigotimes_{j=1}^n (\tilde{1} \ominus \tilde{e}_{j_{(l)}}) \otimes \tilde{x}_j \right] \right\} \otimes \left\{ \tilde{f} \otimes \left[ \bigotimes_{k=1}^m (\tilde{1} \ominus \tilde{e}_k) \otimes \tilde{x}_k \right] \right\} \tilde{v}_{Al} \leq \tilde{U}_{Al} \\
 & l = 1, \dots, 5, \tilde{x}_j, \tilde{x}_k \in \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \forall j = 1, \dots, n, \forall k = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{U}_{Al}$  es un nivel de riesgo asumible por la Organización. Este problema se puede resolver mediante algoritmos evolutivos uniobjetivo, como Algoritmos Genéticos, o Recocido Simulado, de modo similar al anterior, imponiendo un umbral de similitud entre el riesgo en cada componente  $\tilde{R}'_{(l)}$  y la cota  $\tilde{U}_{Al}$  asumible por la Organización.

**5.3.2. Protección de los activos terminales a cualquier amenaza. Minimización de la probabilidad de transmisión de fallos.** Por definición, una amenaza materializada sobre un activo de soporte  $A_i$  puede transmitirse a un activo inferior  $A_j$  (en dirección a los activos terminales) con probabilidad  $\widetilde{DD(A_i, A_j)}$ . Así, los fallos generados por un activo atacado pueden alcanzar los activos terminales con graves consecuencias para la Organización. Por tanto, una amenaza sobre el activo  $A_i$  con probabilidad  $\tilde{f}$  se puede considerar una amenaza sobre  $A_j$  con probabilidad  $\tilde{f} \otimes \widetilde{DD(A_i, A_j)}$ . Entonces, un tercer tipo de salvaguardas son aquéllas que dificultan la transmisión de fallos entre activos. Tales salvaguardas no dependen de las amenazas consideradas, sino de los activos implicados. Ahora bien, la probabilidad de transmisión de fallo  $\widetilde{DD(A_i, A_j)}$  es resultado de operaciones borrosas entre las probabilidades de transmisión de fallo de los activos intermedios que unen el activo de soporte atacado con otro activo. En cada uno de estos activos intermedios se pueden implementar salvaguardas que eviten o reduzcan la probabilidad de transmisión de fallo. De modo que, una vez identificadas estas salvaguardas, podemos considerar el problema de optimización consistente en elegir un paquete de éstas en cada activo con objeto de minimizar los costes, controlando los grados de dependencia indirectos  $\widetilde{DD(A_i, A_k)}$  con el activo terminal  $A_k$ , para cualquier activo de soporte  $A_i$ . Es decir, el problema consiste en elegir las salvaguardas más baratas,

de modo que la probabilidad de transmisión de fallos a los activos terminales sea asumible por la Organización, con independencia de cuál sea el activo atacado.

Sea  $S^{i,j}$  un conjunto de salvaguardas que dificultan la transmisión de fallo directo entre  $A_i$  y  $A_j$ . Cada  $S_k^{i,j} \in S^{i,j}$  tiene un coste monetario de  $C_k^{i,j}$  y un efecto  $\tilde{e}_k^{i,j}$  sobre  $\widetilde{dd(A_i, A_j)}$ . De modo que esta probabilidad se reduce al nivel  $\widetilde{dd(A_i, A_j)} \otimes (1 \ominus \tilde{e}_k^{i,j})$ . El problema de mantener en un nivel asumible (bajo o muy bajo) la probabilidad de transmisión de fallos entre los activos de soporte y los activos terminales, con un coste mínimo, puede plantearse como:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{i,j} \sum_k C_k^{i,j} x_k^{i,j} \\ & \text{sujeto a} \\ & \widetilde{DD(A_i, A_k)} \leq \tilde{U}_{ik} \quad \forall i \quad \forall k \\ & \tilde{x}_k^{i,j} \in \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \quad \forall i, j, k \end{aligned}$$

Siendo  $\tilde{U}_{ik}$  un valor residual asumible por los decisores de SI,  $x_k^{i,j} = 1$  si seleccionamos la salvaguarda  $S_k^{i,j}$ , y donde  $\widetilde{DD(A_i, A_k)}$  se recalcula sustituyendo los valores  $\widetilde{dd(A_i, A_j)}$  por los valores afectados por las salvaguardas seleccionadas entre dos activos consecutivos  $\widetilde{dd(A_i, A_j)} \otimes \left[ \bigotimes_k (1 - \tilde{e}_k^{i,j}) \right]$ .

Hemos de tener en cuenta que el grado de dependencia indirecto se calcula de modo recursivo siguiendo el algoritmo expuesto en la Sección 5.1. De este modo, el grado de dependencia de los activos de soporte más alejados de los terminales, se puede calcular a partir del grado de dependencia de los activos más próximos. Por tanto, el problema se puede resolver por etapas, y se debe verificar el *Principio de Optimalidad de la Programación Dinámica*: Dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es, a su vez, óptima. Procedemos entonces de la siguiente manera:

- Sea  $L_0$  el conjunto de activos terminales.
- Consideramos el conjunto  $L_1$  de todos los activos de soporte cuyos hijos estén en el conjunto  $L_0$ . Se eligen salvaguardas de modo que se minimicen los costes, manteniendo en un nivel asumible los grados de dependencia sobre sus hijos.
- Consideramos el conjunto  $L_2$  de todos los activos de soporte cuyos hijos estén en el conjunto  $L_0 \cup L_1$ . Se eligen salvaguardas de modo que se minimicen los

### 5.3. GESTIÓN DE RIESGOS MEDIANTE ALGORITMOS EVOLUTIVOS Y PROGRAMACIÓN DINÁMICA EN AMBIENTE BORROSO

---

costes, manteniendo en un nivel asumible los grados de dependencia sobre  $L_0$ . Nótese que los grados de dependencia indirectos de los hijos de  $L_2$  sobre los activos terminales ya han sido determinados en la etapa anterior, por lo que sólo hay que calcular los grados de dependencia directos sobre los activos de  $L_0 \cup L_1$ .

- ...
- Consideramos el conjunto  $L_n$  de todos los activos de soporte cuyos hijos estén en el conjunto  $L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1}$ . Se eligen salvaguardas de modo que se minimicen los costes, manteniendo en un nivel asumible los grados de dependencia sobre  $L_0$ . Nótese que los grados de dependencia indirectos de los hijos de  $L_n$  sobre los activos terminales ya han sido determinados en la etapa anterior, por lo que sólo hay que calcular los grados de dependencia directos sobre los activos de  $L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n-1}$ .

En cada etapa podemos aplicar un algoritmo evolutivo uniobjetivo para realizar la selección óptima de las salvaguardas. El criterio parada en cada etapa es un umbral de similitud a las cotas  $\tilde{U}_{ik}$ . Cuando se alcanza este umbral se pasa a la siguiente etapa. El algoritmo finaliza cuando se han recorrido todas las etapas.

Otro criterio de parada puede ser un presupuesto prefijado. Cuando en una de las etapas se supera este presupuesto, finaliza la selección de salvaguardas pero se calcula el grado de dependencias de los activos restantes. Si los valores obtenidos son asumibles se finaliza. En caso contrario se reinicia el algoritmo partiendo de una solución mejor (más barata) en  $L_1$ . Si no existe esta solución, se trata de mejorar la de  $L_2$ , y así sucesivamente. Si en ninguna etapa se consigue mejorar la solución obtenida anteriormente, entonces concluimos que el problema es infactible con el presupuesto prefijado. En esta variante se fija un límite de iteraciones en la búsqueda de una mejor solución dentro de cada etapa.

**Ejemplo.** En la Figura 5.2.2, se ajustan en primer lugar los grados de dependencia  $\widetilde{dd}(A_4, A_6) = \widetilde{DD}(A_4, A_6) \leq \tilde{U}_{46}$  y  $\widetilde{dd}(A_5, A_6) = \widetilde{DD}(A_5, A_6) \leq \tilde{U}_{56}$  minimizando el coste. Después se ajustan  $\widetilde{dd}(A_3, A_6)$  y  $\widetilde{dd}(A_3, A_4)$  de modo que se minimice el coste y  $\widetilde{DD}(A_3, A_6) = \widetilde{dd}(A_3, A_6) \oplus \left( \widetilde{dd}(A_3, A_4) \otimes \widetilde{DD}(A_4, A_6) \right) \leq \tilde{U}_{36}$  (El valor  $\widetilde{DD}(A_4, A_6)$  se ha calculado anteriormente). Después se ajusta  $\widetilde{dd}(A_2, A_3)$  y  $\widetilde{dd}(A_2, A_6)$  de modo que se minimice el coste y  $\widetilde{DD}(A_2, A_6) = \widetilde{dd}(A_2, A_6) \oplus$

$\left(\widetilde{dd(A_2, A_3)} \otimes \widetilde{DD(A_3, A_6)}\right) \leq \widetilde{U}_{26}$  (El valor  $\widetilde{DD(A_3, A_6)}$  se ha calculado anteriormente). Finalmente se ajustan  $\widetilde{dd(A_1, A_2)}$ ,  $\widetilde{dd(A_1, A_3)}$ ,  $\widetilde{dd(A_1, A_4)}$  y  $\widetilde{dd(A_1, A_5)}$  de modo que se minimice el coste y

$$\begin{aligned} \widetilde{DD(A_1, A_6)} = & \left(\widetilde{dd(A_1, A_2)} \otimes \widetilde{DD(A_2, A_6)}\right) \oplus \left(\widetilde{dd(A_1, A_3)} \otimes \widetilde{DD(A_3, A_6)}\right) \oplus \\ & \oplus \left(\widetilde{dd(A_1, A_4)} \otimes \widetilde{DD(A_4, A_6)}\right) \oplus \left(\widetilde{dd(A_1, A_5)} \otimes \widetilde{DD(A_5, A_6)}\right) \leq \widetilde{U}_{16} \end{aligned}$$

Nótese que los valores  $\widetilde{DD(A_1, A_6)}$ ,  $\widetilde{DD(A_2, A_6)}$ ,  $\widetilde{DD(A_3, A_6)}$ ,  $\widetilde{DD(A_4, A_6)}$  y  $\widetilde{DD(A_5, A_6)}$  han sido calculados en las fases anteriores.



## CONCLUSIONES

En este trabajo hemos propuesto un modelo borroso de análisis y gestión de riesgos en los sistemas de información. Este modelo, a medio camino entre los modelos cualitativos y cuantitativos promovido por las metodologías estatales, basadas a su vez en las normas internacionales de la serie ISO/IEC 27000, posee todas las ventajas de ambos, consistentes en admitir imprecisión en la información aportada por los expertos, al tiempo que permite el tratamiento computacional de la misma.

En el desarrollo del modelo ha sido necesario proponer un método interactivo analista-experto de elicitación de probabilidades borrosas en el marco de la Teoría de la Probabilidad Lingüística, el establecimiento de una aritmética de números borrosos trapezoidales adecuada, en correspondencia con la Teoría del Cálculo de Probabilidades, la propuesta de una nueva función de similitud de números borrosos trapezoidales que mejora al resto de funciones encontradas en la literatura, el desarrollo de algoritmos recursivos que simplifiquen y automaticen el cálculo de los grados de dependencia de los activos de soporte de información con respecto a los activos terminales, y finalmente, el establecimiento de técnicas de optimización metaheurística y de programación matemática en la selección de salvaguardas y controles del sistema de información.

Con este modelo, los expertos deben valorar las probabilidades de fallo, mediante el diálogo metódico con el analista, así como los activos (en sus cinco componentes), las probabilidades de materialización de las amenazas y la degradación que puede sufrir los activos atacados. A partir de esta información se obtienen automáticamente los indicadores de impacto y riesgo. Finalmente, para un conjunto de salvaguardas de las que se conocen costes y efecto provocado (de manera imprecisa-lingüística), el modelo permite seleccionar un paquete de ellas con mínimo coste, de modo que el riesgo sobre los activos se reduzca a niveles asumibles por la Organización.

Durante el desarrollo de este trabajo se han publicado, o están aceptados, o en fase de revisión, los siguientes artículos:

1. Sobre un modelo general de análisis de riesgos, bajo un enfoque borroso, en sistemas de información:
  - E. Vicente, A. Jiménez and A. Mateos. “A Fuzzy Approach to Risk Analysis in Information Systems”. 2nd International Conference on Operations Research and Enterprise Systems. Barcelona, February 2013. ISBN: 978-989-8565-40-2. pp 130-133.
  - Eloy Vicente, Antonio Jiménez and Alfonso Mateos. “A Fuzzy Extension of MAGERIT Metodology for Risk Analysis”. International Association for Development of the Information Society. Lisbon. March 2013. ISBN: 978-972- 8939-83-0. pp 39-46.
  - Eloy Vicente, Alfonso Mateos and Antonio Jiménez. “Análisis de riesgos en los sistemas de Información. Un enfoque difuso”. 8ª Conferencia Ibérica de Sistemas y Tecnologías de la Información. Lisboa, Junio de 2013. ISBN: 978-989-96247-9-5. pp 557-562.
  - E. Vicente, A. Mateos and A. Jiménez. “A Fuzzy Extension of the MAGERIT Methodology for Risk Analysis in Information Systems”. Expert Systems with Applications. En revisión.
2. Sobre una nueva función de similitud de números difusos trapezoidales:
  - E. Vicente, A. Mateos and A. Jiménez, “A New Similarity Function for Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers”. Rutkowski et al. (Eds.): ICAISC, Part I, LNAI 7894, pp. 400–411, 2013. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. June 2013. ISBN: 978-3-642-38658-9. pp 400-411.
  - E. Vicente, A. Jiménez and A. Mateos. “Similarity Functions for Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers: An Improved Comparative Analysis”. Expert Systems with Applications. En revisión.
3. Sobre un método interactivo analista-decisor de elicitación de probabilidades difusas:
  - Eloy Vicente, Antonio Jiménez and Alfonso Mateos. An interactive method of fuzzy probability elicitation in risk analysis in Information Systems. 4th International Conference on Risk Analysis and Crisis Response. Istanbul, Turkey 2013. August 2013. Aparecerá.
  - El trabajo anterior ha sido además seleccionado para ser publicado como capítulo del libro Intelligent Systems and Decision Making for Risk Analysis and Crisis Response por la editorial CRC Press.

## LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

La mayor crítica recibida por la metodología MAGERIT de análisis y gestión de riesgos en los sistemas de información radica en que se trata de un modelo estático, en el que difícilmente se puede actualizar la información de los expertos, y en el que los parámetros que definen las amenazas (probabilidad y degradación) sobre los activos son constantes. Sin embargo, dichos parámetros pueden cambiar en el tiempo y las condiciones ambientales pueden influir sobre ellos. Por ejemplo, una amenaza de incendio sobre las instalaciones no tendrá las mismas probabilidades de ocurrencia, ni la misma degradación, en todas las estaciones del año.

Es necesario entonces desarrollar modelos que permitan encontrar cuáles son los factores que influyen sobre las amenazas, construyendo bases de datos de incidencias lo más completas posibles, así como determinar en qué cuantía afectan estos factores a los parámetros de las amenazas. En este sentido serán útiles los modelos de regresión logística borrosa para controlar las probabilidades de materialización de las amenazas, así como métodos de aprendizaje automático que nos permita inferir la degradación que puede sufrir un activo en cada situación.

Esta información nos permitirá establecer un modelo de vigilancia y alerta temprana que evite la materialización de las amenazas o atenúe la degradación de los activos atacados. De este modo se podrán identificar una serie de salvaguardas que se tomarán de forma eventual cuando las circunstancias transitorias lo recomienden.

Por otro lado, el modelo teórico descrito en la Sección 5.3 está pendiente de implementación a efectos de experimentación y simulación de diversos algoritmos con objeto de observar cuáles funcionan mejor en el ámbito borroso, valorando costes computacionales, diversificación de las soluciones que aproximan la frontera de Pareto (en el caso multiobjetivo), etcétera.

Finalmente aplicaremos el modelo descrito en un caso real.



## Bibliografia

- [1] Abbas, Ali E., Budescu, David V., Hsiu-Ting Yu, Haggerty, Ryan. 2008. A Comparison of Two Probability Encoding Methods: Fixed Probability vs. Fixed Variable Values. *Decision Analysis* Vol. 5, No. 4
- [2] AbuAarqob O.A., Shawagfeh N., and AbuGhneim O.A. (2008) Functions Defined on Fuzzy Real Numbers According to Zadeh's Extension. *International Mathematical Forum*, 3, 2008, no. 16, 763 - 776.
- [3] C. Alberts and A. Dorofee, *Managing Information Security Risks: The OCTAVE Approach*. New York: Addison- Wesley, 2002.
- [4] C. Alberts and A. Dorofee, *OCTAVE-s Method Implementation Guide Version 2.0*. Pittsburgh: Canergie Mellon University, 2005.
- [5] P.P. Bonissone. "Selecting uncertainty calculi and granularity: an experiment in trading-off precision and complexity". *Uncertainty in Artificial Intelligence*, Amsterdam 1987.
- [6] Chen, S. M. (1985). Operations on fuzzy numbers with function principle. *Tamkang Journal of Management Science*, 6, 13-25.
- [7] S.-M. Chen, "New methods for subjective mental workload assessment and fuzzy risk analysis", *Cybernetics Syst.*, vol. 27, pp. 449-472, 1996.
- [8] S.-J. Chen and S.-M. Chen, "A new method to measure the similarity between fuzzy numbers", *Proc. 10th IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, pp. 208-214, 2001.
- [9] S.-J. Chen and S.-M. Chen, "Fuzzy risk analysis based on similarity measures of generalized fuzzy numbers", *IEEE Trans. Fuzzy Syst*, vol. 11, pp. 45-56, 2003.
- [10] S.-J. Chen and S.-M. Chen, "Fuzzy risk analysis based on the ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers", *Appl Intell*, vol. 26, pp. 1-11, 2007.
- [11] S. H. Wei, S. M. Chen, "A new approach for fuzzy risk analysis based on similarity measures of generalized fuzzy numbers," *Expert Systems with Applications*, vol. 36, pp. 589 - 598, 2009.
- [12] *CCTA Risk Analysis and Management Method (CRAMM), Version 5.0*. London: Central Computing and Telecommunications Agency (CCTA), 2003.

- [13] G. Cojazzi, G. Guida, L. Pinola, R. Sardella and P. Baroni (1987). KEEJAM: a Knowledge Engineering Methodology for Expert Judgement Acquisition and modelling in Probabilistic Safety Assessment. In ‘Advances in safety and reliability’, Vol. 1, pp. 199-206. C. Guedes Soares (Editor), Pergamon.
- [14] Dantzig, G. “Discrete variable extremum problems”, Operations Research 5,266–277. 1957.
- [15] Deb K., Agrawal S., Pratab A., Meyarivan T. (2000). A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II, Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature VI Conference, pp. 849-858
- [16] Dokas, I.M., Nordlander, T.E. & Wallace, R.J. 2007. Fuzzy fault tree representation and maintenance based on frames and constraint technologies: a case study. In Proc. K-CAP’07 Workshop on Knowledge Capture and Constraint Programming, Whistler, British Columbia, Canada.
- [17] A. Edward Samuel , M. Venkatachalapathy, A simple heuristic for solving generalized fuzzy transportation problems. International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 83 No. 1 2013, 91-100
- [18] Font, J.J., Miralles, A. and Sanchis M. (2012) On the Fuzzy Number Space with the Level Convergence Topology. Journal of Function Spaces and Applications.
- [19] Gil, M.A. López-Díaz, M. and Ralescu, D. Overview on the development of fuzzy random variables. Fuzzy Sts and Systems 2006.
- [20] García Cascales M.S., “Métodos para la comparación de alternativas mediante un Sistema de Ayuda a la Decisión (SAD) y Soft Computing”. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Cartagena, 2009.
- [21] Gomathi Nayagam, V. L. & Sivaraman, G. (2012). A novel similarity measure between generalized fuzzy numbers. International Journal of Computer Theory and Engineering, 4, 448-450.
- [22] Halliwell J. 2007. Linguistic Probability Theory. PhD Thesis. University of Edinburgh.
- [23] F. Herrera and L. Martínez., “A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words”, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, pp.746–752, 2000.
- [24] C.H. Hsieh and S.H. Chen, “Similarity of generalized fuzzy numbers with graded mean integration representation”, *Proc. 8th Int. Fuzzy Syst. Assoc. World Congress*, pp. 551–555, 1999.
- [25] ISO/IEC 27001:2005, *Information technology — Security Techniques — Information Security Management Systems - Requirements*. Geneva, Switzerland 2005.
- [26] ISO/IEC 27000:2009, *Information Security Management Systems — Overview and Vocabulary*. Geneva, Switzerland 2009.

- 
- [27] ISO/IEC 27003:2010, *Information security management system implementation guidance*. Geneva, Switzerland 2009.
- [28] ISO/IEC 27005:2011, *Information Technology - Security Techniques - Information Security risk Management*. Geneva: International Organization for Standardization, 2005.
- [29] Jara Vera, V., Sanchez Avila, C., Guerra Casanova, J., and Santos Sierra A. *Optimización en la implantación de salvaguardas o contramedidas en la Gestión de Riesgos. Normativa y herramientas habituales en España*. XII Reunión Española sobre Criptología y Seguridad de la Información. San Sebastián 2012.
- [30] Kumar, A., Singh, P., Kaur, J. Generalized Simplex Algorithm to Solve Fuzzy Linear Programming Problems with Ranking of Generalized Fuzzy Numbers. TJFS: Turkish Journal of Fuzzy Systems, 2010.
- [31] Kumar, A., y Kaur, M., An Algorithm for Solving Fuzzy Maximal Flow Problems Using Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers. International Journal of Applied Science and Engineering 2010. 8, 2: 109-118
- [32] Kwakernaak, H. Fuzzy random variables. Part I: definitions and theorems, Inform. Sci. 15 (1978) 1–29.
- [33] Kwakernaak, H. Fuzzy random variables. Part II: algorithms and examples for the discrete case, Inform. Sci. 17 (1979) 253–278.
- [34] H.S. Lee, “An optimal aggregation method for fuzzy opinions of group decision”, *Proc. 1999 IEEE Int. Conf. Syst., Man., and Cybernetics*, pp. 314–319, 1999.
- [35] F. López Crespo, M.A. Amutio-Gómez, J. Candau and J.A. Mañas, *Methodology for Information Systems Risk. Analysis and Management (MAGERIT version 2). Book I-The Method*. Madrid: Ministerio de Administraciones Públicas, 2006a.
- [36] F. López Crespo, M.A. Amutio-Gómez, J. Candau and J.A. Mañas, *Methodology for Information Systems Risk Analysis and Management (MAGERIT version 2). Book II-Catalogue of Elements*. Madrid: Ministerio de Administraciones Públicas, 2006b.
- [37] F. López Crespo, M.A. Amutio-Gómez, J. Candau and J.A. Mañas, *Methodology for Information Systems Risk Analysis and Management (MAGERIT version 2). Book III-The Techniques*. Madrid: Ministerio de Administraciones Públicas, 2006c.
- [38] Martello, M. y Toth, P. *Knapsack Problems*, John Wiley and Sons 1990.
- [39] B. Martín del Brío, A. Sanz Molina. *Redes Neuronales y Sistemas Borrosos*. Ra-Ma 3<sup>a</sup> ed. 2206.
- [40] *Mehari 2010 - Risk Analysis and Treatment Guide*. Paris: Club de la Sécurité de l’Information Francais (CSIF), 2007.

- 
- [41] A. Méndez Barco and J.A. Mañas, *Manual del Usuario Pilar Basic versión 5.1*. Madrid: Centro Criptológico Nacional, 2011.
- [42] Merkhofer (1987). Quantifying Judgemental Uncertainty: Methodology, Experiences and Insights. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC-17, No.5, pp 741-752.
- [43] Morgan, M.G. and Henrion, M. Uncertainty: A guide to dealing with Uncertainty in Quantitative Risk and Policy Analysis. Cambridge University Press. Cambridge G.B. 1990.
- [44] G. Stoneburner and A. Gougen, *NIST 800-30 Risk Management. Guide for Information Technology Systems*. Gaithersburg: National Institute of Standard and Technology, 2002.
- [45] A. Syalim, Y. Hori and K. Sakurai, "Comparison of risk analysis methods: Mehari, Magerit, NIST800-30 and Microsoft's Security Management Guide", *Proc. Int. Conf. Availability, Reliability and Security*, pp. 726–735, 2009.
- [46] E. Vicente, A. Jiménez and A. Mateos. "A Fuzzy Approach to Risk Analysis in Information Systems". 2nd International Conference on Operations Research and Enterprise Systems. Barcelona 2013.
- [47] E. Vicente, A. Mateos and A. Jiménez, "A New Similarity Function for Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers", 12th International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing. Zakopane 2013. To appear.
- [48] Ralescu, D.A. Fuzzy probabilities and their applications to statistical inference, in: B. Bouchon-Meunier, R.R. Yager, L.A. Zadeh (Eds.), *Advances in Intelligent Computing-IPMU'94*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 945, Springer, Paris, 1995, pp. 217–222.
- [49] S. Sagaya Roseline y E.C. Henry Amirtharaj. Generalized fuzzy modified distribution method for generalized fuzzy transportation problem. *International Multidisciplinary Research Journal* 2011, 1(10):12-15.
- [50] Soo, K. J. "How Much Is Enough? A Risk-Management Approach to Computer Security", en *CRISP*, 2000.
- [51] Spetzler, C. S., C.-A. S. S. von Holstein. 1975. Probability encoding in decision analysis. *Management Sci.* 22(3) 340–358.
- [52] B. Sridevi, R. Nadarajan, "Fuzzy Similarity Measure for Generalized Fuzzy Numbers", *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, Vol. 2, No. 2, 2009.
- [53] Tversky, A. and Kahneman, D. 1974. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, New Series, Vol. 185, No. 4157. pp. 1124-1131.
- [54] U.S. Nuclear Regulatory Commission 1990. Severe Accident Risks: An Assessment for Five U.S. Nuclear Power Plants. NRC Publications



- [55] VV.AA. Expert Elicitation: Methodological suggestions for its use in environmental health impact assessments. National Institute for Public Health and the Environment 2008.
- [56] VV.AA. Expert Elicitation Task Force White Paper. U.S. Environmental Protection Agency 2011.
- [57] Verdigay J.L. and Vergara E.R. *Fuzzy Termination Criteria in Knapsack Problem Algorithms*. Mathware & Soft Computing 7 (2000) 89-97
- [58] E. Vicente, A. Jiménez and A. Mateos. “A Fuzzy Approach to Risk Analysis in Information Systems”. 2nd International Conference on Operations Research and Enterprise Systems. Barcelona 2013.
- [59] E. Vicente, A. Mateos and A. Jiménez, “A New Similarity Function for Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers”, 12th International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing. Zakopane 2013. To appear.
- [60] E. Vicente, A. Jiménez and A. Mateos. “An interactive method of fuzzy probability elicitation in risk analysis”, 4th International Conference on Risk Analysis and Crisis Response. August 2013. Istanbul. Turkey. Aparecerá.
- [61] Vicente, A. Jiménez and A. Mateos. Similarity Functions for Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers: An Improved Comparative Analysis. Expert Systems with Applications. En revisión.
- [62] J. Wang and J. Hao, “A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words”, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 14, pp. 435–445, 2006.
- [63] S. H. Wei and S. M. Chen, “A new approach for fuzzy risk analysis based on similarity measures of generalized fuzzy number”, *Expert Syst. Appl.*, vol. 36, pp. 589–598, 2009.
- [64] Z. S. Xu, “A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations”, *Inform. Sci.*, vol. 166, pp.19–30, 2004.
- [65] Z. Xu, S. Shang, W. Qian and W. Shu, “A method or fuzzy risk analysis based on the new similarity of trapezoidal fuzzy numbers”, *Expert Syst. Appl.*, vol. 37, pp. 1920–1927, 2010.
- [66] Ye, J. (2011). Multicriteria decision-making method based on a cosine similarity measure between trapezoidal fuzzy numbers. International Journal of Engineering, Science and Technology, 3, 272-278.
- [67] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets”, *Inform. Control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.
- [68] Zadeh. L., (1968) Probability measures of fuzzy events. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 23:421–427.
- [69] L. A. Zadeh, “Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. 3, pp 28-44, 1973.

- [70] Zadeh. L. A., (1975) The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part 1. IS, 8:199–249.
- [71] Zadeh. L.A., (1975) The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part 2. IS, 8:301–353.
- [72] Zadeh. L.A., (1975) The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part 3. IS, 9:43–80.
- [73] Zitler, E., Laumans, M., Thiele, L. *SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm*. Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK). Department of Electrical Engineering Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich 2000.
- [74] Zhu, L. & Xu, R. (2012). Fuzzy risk analysis based on similarity measure of generalizand fuzzy numbers. Fuzzy Engineering and Operations Research. Berlin/Heidelberg: Springer, 569-587.